Matemática Elementar

lembrando e exercitando

2ª edição

Márcia Lourenço
Ana Paula Ern da Silva

ISBN 978-85-7717-165-1

9 788577 171651

UNIVERSIDADE FEEVALE

MATEMÁTICA ELEMENTAR:
lembrando e exercitando

2ª edição

Associação Pró-Ensino Superior em Novo Hamburgo – ASPEUR
Universidade Feevale

MATEMÁTICA ELEMENTAR:
lembrando e exercitando

2ª edição

Márcia Lourenço
Ana Paula Ern da Silva

Novo Hamburgo – Rio Grande do Sul – Brasil
2014

COMO MELHOR UTILIZAR ESTE E-BOOK

Não desperdice papel, imprima somente se necessário.

Este e-book foi feito com intenção de facilitar o acesso à informação. Baixe o arquivo e visualize-o na tela do seu computador sempre que necessitar. No entanto, caso seja necessário, o arquivo pode ser impresso em formato A4, com total aproveitamento de papel.

É possível também imprimir somente partes do texto, selecionando as páginas desejadas nas opções de impressão. Os botões interativos são apenas elementos visuais e não aparecerão na impressão, utilize-os para navegar pelo documento. Se preferir, utilize as teclas “Page Up” e “Page Down” do teclado ou o “Scroll” do mouse para retornar e prosseguir entre as páginas.

Este texto não aparecerá na página caso ela seja impressa.

PRESIDENTE DA ASPEUR
Luiz Ricardo Bohrer

REITOR DA UNIVERSIDADE FEEVALE
Ramon Fernando da Cunha

PRÓ-REITORA DE ENSINO
Inajara Vargas Ramos

PRÓ-REITOR DE PESQUISA E INOVAÇÃO
João Alcione Sganderla Figueiredo

PRÓ-REITOR DE PLANEJAMENTO E ADMINISTRAÇÃO
Alexandre Zeni

PRÓ-REITORA DE EXTENSÃO E ASSUNTOS COMUNITÁRIOS
Gladis Luisa Baptista

COORDENAÇÃO EDITORIAL
Inajara Vargas Ramos

REALIZAÇÃO
Instituto de Ciências Sociais Aplicadas – ICSA

EDITORA FEEVALE
Celso Eduardo Stark
Graziele Borguetto Souza
Adriana Christ Kuczynski

CAPA E EDITORAÇÃO ELETRÔNICA
1ª edição: Helena Bender Hennemann
Atualizações para 2ª edição: Daiane Thomé Scariot e Graziele Borguetto Souza

REVISÃO
1ª edição: Valéria Koch Barbosa
Atualizações para 2ª edição: Autoras

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)
Universidade Feevale, RS, Brasil
Bibliotecária responsável: Elena da Costa Plümer – CRB 10/1349

Lourenço, Márcia.
Matemática elementar [recurso eletrônico]: lembrando e exercitando / Márcia Lourenço, Ana Paula Ern da Silva. – 2. ed. – Novo Hamburgo: Feevale, 2014.

Sistema requerido: Adobe Acrobat Reader.
Modo de acesso: <www.feevale.br/editora>
Inclui bibliografia.
ISBN 978-85-7717-165-1

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Matemática (Ensino médio). 3. Matemática (Ensino fundamental). 4. Funções (Matemática). I. Silva, Ana Paula Ern da. II. Título.

CDU 51

UNIVERSIDADE FEEVALE
Câmpus I: Av. Dr. Maurício Cardoso, 510 – CEP 93510-250 – Hamburgo Velho – Novo Hamburgo – RS
Câmpus II: ERS 239, 2755 – CEP 93352-000 – Vila Nova – Novo Hamburgo – RS
Fone: (51) 3586.8800 – Homepage: www.feevale.br

Índice

Apresentação

"Nenhuma investigação humana pode ser chamada Ciência se não puder ser demonstrada matematicamente."
Leonardo Da Vinci

A necessidade de conhecer e ensinar matemática se faz presente ao longo dos séculos. Da Vinci a demostrava através da sua arte, Newton fez uso dessa ciência para demonstrar suas conquistas e George Cantor dizia que “a essência da Matemática reside na sua liberdade”. Compartilhando desses pensamentos e com intuito de promover uma formação científica e técnica é de nosso interesse e obrigação resgatar o aluno para este universo.

No entanto, a prática em sala de aula revela um educando carente e, muitas vezes, sem ao menos o conhecimento prévio de uma matemática elementar, limitando seu aprendizado e tornando, assim, essa formação enfadonha.

Diante desta realidade, despertou-nos a necessidade de reunirmos em uma única obra, conceitos e exercícios que resgatem conhecimentos matemáticos básicos, afim de que o discente possa utilizá-los para uma melhor compreensão e análise de outras ciências e, após esta etapa seja capaz de perceber a necessidade e beleza da Matemática em seu universo acadêmico.

A obra pretende resgatar e aplicar, de forma interdisciplinar e objetiva, conceitos que envolvem a matemática, os quais já foram vistos, para a grande parte do grupo acadêmico, ao longo de sua vida escolar. Assim, revisamos regra de três, porcentagem, frações, produtos notáveis, conjuntos, equações e funções de uma variável real. As funções iniciam em tipos simples, desde as algébricas inteiras e fracionárias, acabando nas transcendentes (exponenciais, logarítmicas e trigonométricas), considerando o estudo dos diferentes pontos de vista (gráfico e algébrico).

A estrutura de cada capítulo apresenta uma breve síntese do conceito abordado, seguida de exemplos resolvidos e comentados e finaliza com exercícios propostos – com respostas ao final do livro - os quais abrangem as diferentes ciências, de forma interdisciplinar, procurando levar os discentes a uma reflexão sobre os problemas apresentados, com o objetivo de não fazerem-nos memorizar conteúdos, mas sim, estabelecer um sentido e compreensão para o entendimento dos mesmos, estando estes, então, dentro do contexto conjuntural do qual estão envolvidos. Os conteúdos na obra são trabalhados em disciplinas básicas e servem de referência para disciplinas de matemática aplicada, cálculo, física, química e outras específicas de cada curso.

Esta obra será disponibilizada em mídia eletrônica de forma gratuita com o objetivo de auxiliar estudantes de diferentes instituições de ensino que tenham dúvidas ou dificuldades nos conteúdos aqui relembrados. Desta forma as autoras e a editora não visam fins lucrativos.

Sugestão e informações sobre eventuais erros, enganos ou omissões que possa ter passado sem ter sido observado nesta obra serão bem recebidos através do e-mail editora@feevale.br.

As autoras

1 Noções Básicas de Matemática

CONJUNTOS NUMÉRICOS

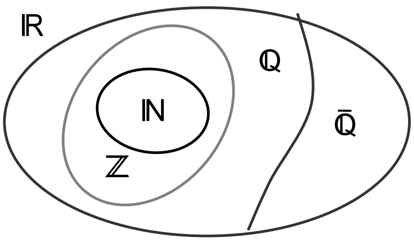
- Conjunto dos números *naturais*, simbolizado pela letra $\mathbb{N}$.
  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$.

- Conjunto dos números *inteiros:* simbolizado pela letra $\mathbb{Z}$.
  $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$.

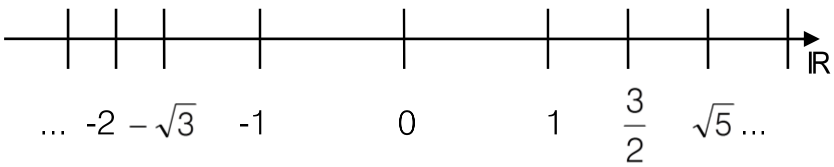
- Conjunto dos números *racionais,* simbolizado pela letra $\mathbb{Q}$.
  $\mathbb{Q} = \{x / x = a/b, \text{ com } a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \text{ e } b \neq 0\}$.

- Conjunto dos números *irracionais,* simbolizado pela letra $\bar{\mathbb{Q}}$. Existem dízimas infinitas não periódicas, às quais damos o nome de números irracionais, que não podem ser obtidos pela divisão de dois números inteiros, isto é, na forma $\frac{a}{b}$. Essa divisão é chamada "razão", e daí o nome irracional: não reduzível a uma razão.

- Conjunto dos números reais: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \bar{\mathbb{Q}}$
  $\mathbb{R} = \{x / x \text{ é racional ou } x \text{ é irracional}\}$.
  Portanto, são números reais todos os números naturais, inteiros, racionais e irracionais. Observe o desenho!



Podemos representar os $\mathbb{R}$ em uma reta que chamamos *Reta Real.* A cada ponto da reta corresponde um único número real e a cada número real corresponde um único ponto da reta. Assim, existe uma correspondência biunívoca entre os números reais e os pontos da reta.



<u>Observação</u>:

Simbolicamente pode-se escrever:
$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$;
$\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$;
$\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$.

REGRA DE SINAIS

Adição e subtração	✓ Sinais iguais → Soma e mantém o sinal. ✓ Sinais diferentes → Subtrai e conserva o sinal do número maior.
Multiplicação e divisão	✓ Sinais iguais → Resultado positivo ✓ Sinais diferentes → Resultado negativo

Exemplo 1.1

Calcule cada uma das expressões:

a) $-(92) = -92$

b) $-(-92) = 92$

c) $5 - (-4) = 5 + 4 = 9$

d) $-(7 + 8) = -15$

e) $5 - 2 = 3$

f) $-5 + 2 = -3$

g) $(7) \cdot (8) = 56$

h) $(-7) \cdot (8) = -56$

i) $(-7) \cdot (-8) = 56$

j) $10 \div 2 = 5$

k) $-10 \div 2 = -5$

l) $-10 \div (-2) = 5$

FRAÇÕES

$$\frac{a}{b}\begin{cases} a \text{ dividendo ou numerador} \\ b \text{ divisor ou denominador} \end{cases}, \text{ com } b \neq 0.$$

Simplificação de Frações

Para simplificar uma fração, deve-se dividir o numerador e o denominador pelo seu máximo divisor comum. Veja as simplificações:

a) $\frac{84}{252} = \frac{84 \div 84}{252 \div 84} = \frac{1}{3}$

b) $-\frac{48}{36} = -\frac{48 \div 12}{36 \div 12} = -\frac{4}{3}$

c) $\frac{-1156}{-392} = \frac{-1156 \div 4}{-392 \div 4} = \frac{-289}{-98} = \frac{289}{98}$

Adição e Subtração de Frações

Inicialmente, devem-se reduzir as frações ao mesmo denominador. Após, é necessário dividir o novo denominador pelos denominadores anteriores e o resultado multiplica-se pelo numerador correspondente.

a) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{b \cdot d}$, com $b \neq 0$ e $d \neq 0$.

b) $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - cb}{b \cdot d}$, com $b \neq 0$ e $d \neq 0$.

Ou numericamente:

$\frac{4}{3} + \frac{5}{2} = \frac{4 \cdot 2 + 5 \cdot 3}{6} = \frac{8 + 15}{6} = \frac{23}{6}$ e

$\frac{4}{21} - \frac{5}{6} = \frac{4 \cdot 2 - 5 \cdot 7}{42} = \frac{8 - 35}{42} = \frac{-27}{42}$, simplificando, $\frac{-27 \div 3}{42 \div 3} = -\frac{9}{14}$

Multiplicação de Frações

Multiplicam-se os numeradores entre si e o mesmo processo ocorre com os denominadores.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd},\ \text{com } b\neq 0 \text{ e } d\neq 0.$$

Veja numericamente:

$$\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{2}=\frac{4\cdot 5}{3\cdot 2}=\frac{20}{6},\ \text{simplificando, } \frac{20\div 2}{6\div 2}=\frac{10}{3}\quad \text{e}$$

$$\frac{4}{21}\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)=\frac{4\cdot(-5)}{21\cdot 6}=\frac{-20}{126},\ \text{simplificando, } \frac{-20\div 2}{126\div 2}=-\frac{10}{63}$$

Divisão de Frações

Multiplica-se a fração do numerador pelo inverso da fração do denominador.

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$$

Numericamente:

$$\frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{2}}=\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{5}=\frac{4\cdot 2}{3\cdot 5}=\frac{8}{15}\quad \text{e}$$

$$\frac{4}{21}\div\left(-\frac{5}{6}\right)=\frac{4}{21}\cdot\left(-\frac{6}{5}\right)=\frac{4\cdot(-6)}{21\cdot 5}=-\frac{24}{105},\ \text{simplificando, } -\frac{24\div 3}{105\div 3}=-\frac{8}{35}$$

<u>Observação:</u>

Na prática de docente, é comum encontrar os seguintes erros:

☹ $\frac{\cancel{a}+b}{\cancel{a}}=b$	Essa simplificação só ocorre com o produto. Assim, o certo é:	☺ $\frac{\cancel{a}\cdot b}{\cancel{a}}=b$
☹ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{2}{a+b}$	O certo é:	☺ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{b+a}{a\cdot b}$

POTÊNCIA

Dado um número racional **a** e um número natural **n**, com **n>1**, a expressão **a**^{n} é chamada potência e representa, simplesmente, o produto de **n** fatores iguais a **a**.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}_{n \ \text{fatores}}$$

Propriedades das Potências

a) $x^a x^b = x^{a+b}$

b) $\dfrac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$

c) $(xy)^a = x^a y^a$

d) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^a = \dfrac{x^a}{y^a}$

e) $(x^a)^b = x^{a.b}$

f) $x^1 = x$

g) $x^0 = 1$

h) $x^{-a} = \left(\dfrac{1}{x}\right)^a$

Com x, y $\in \mathbb{R}^*$ e a, b $\in \mathbb{Q}$. Além disso, temos $x^{\frac{p}{g}} = \sqrt[g]{x^p}$, com p $\in \mathbb{Z}$ e g $\in \mathbb{Z}^*$.

<u>Observação:</u>

Em notação científica, é comum usar potências de base 10, por exemplo:

$1{,}3 \times 10^{-3} = 0{,}0013$

$1{,}3 \times 10^{3} = 1.300$

Exemplo 1.2

Calcule:

a) $7^4 \cdot 7^{-6} = 7^{-2} = \left(\frac{1}{7}\right)^2 = \frac{1}{49}$

c) $(-7)^2 - 5^2 = 49 - 25 = 24$

b) $\frac{7^4}{7^{-6}} = 7^{4-(-6)} = 7^{4+6} = 7^{10}$

d) $(-7^3)^2 = 7^6$

FATORAÇÃO

Fatorar um número significa escrevê-lo como uma multiplicação de dois ou mais fatores, por exemplo, fatorar o número 21 significa escrevê-lo na forma 3×7. Fatorar uma expressão algébrica, quando possível, significa escrevê-la como um produto. A seguir, apresentaremos os casos mais usuais.

• ***Produto da soma pela diferença de dois termos***

Produto da soma pela diferença de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo menos o quadrado do segundo.

$$\underbrace{a^2 - b^2}_{\text{polinômio}} = \underbrace{(a+b)(a-b)}_{\substack{\text{forma fatorada} \\ \text{do polinômio}}}$$

$$x - 9 = \left(\sqrt{x} - 3\right)\left(\sqrt{x} + 3\right)$$

• ***Quadrado da soma ou da diferença de dois termos***

Quadrado da soma ou da diferença de dois termos é igual ao primeiro termo ao quadrado, mais (ou menos) duas vezes o produto do primeiro termo pelo segundo, mais o quadrado do segundo termo.

$$\underbrace{(a+b)^2}_{\substack{\text{forma fatr ada} \\ \text{do polinôio}}} = (a+b)(a+b) = \underbrace{a^2 + 2ab + b^2}_{\text{polinômio}}$$

$$\underbrace{(a-b)^2}_{\substack{\text{forma fato rada} \\ \text{do polinômio}}} = (a-b)(a-b) = \underbrace{a^2 - 2ab + b^2}_{\text{polinômio}}$$

$$\left(x^2 - 2y^3\right)^2 = \left(x^2 - 2y^3\right)\left(x^2 - 2y^3\right) = x^4 - 4x^2y^3 + 4y^6$$

- *Fator comum*

  Quando todos os termos de um polinômio têm fator comum, coloca-se este em evidência. A forma fatorada é o produto do fator comum pelo polinômio que se obtém dividindo-se cada termo do polinômio dado pelo fator comum.

$$\underbrace{a^2b + 2ab + a^3b^2}_{\text{polinômio}} = \underbrace{ab\left(a + 2 + a^2b\right)}_{\substack{\text{forma fato rada} \\ \text{do polinômio}}}$$

$$xy + x^2y^3 + 3xy^2 = xy\left(1 + xy^2 + 3y\right)$$

- *Fatoração por agrupamento*

  Quando nem todos os termos de um polinômio têm fator comum, podemos colocar em evidência apenas os termos que possuem fator semelhante. Após, se possível, colocamos, novamente, o fator comum em evidência.

$$\underbrace{a^2b + 2ab - 4a - 8}_{\text{polinômio}} = ab(a+2) - 4(a+2) = \underbrace{(ab-4)(a+2)}_{\substack{\text{forma fato rada} \\ \text{do polinômio}}}$$

$$xy - 4x^2 + 2y^2 - 8xy = x(y-4x) + 2y(y-4x) = (y-4x)(x+2y)$$

Exemplo 1.3

Fatore os seguintes polinômios:

a) $25 - y^2 = (5+y)(5-y)$

b) $25 + 10x + x^2 = (5+x)^2$

c) $\dfrac{4x^4}{25} - \dfrac{y^2}{4} = \left(\dfrac{2x^2}{5} + \dfrac{y}{2}\right)\left(\dfrac{2x^2}{5} - \dfrac{y}{2}\right)$

d) $49 - \dfrac{9y^8}{4} = \left(7 - \dfrac{3y^4}{2}\right)\left(7 + \dfrac{3y^4}{2}\right)$

e) $\dfrac{x^2}{4} - x + 1 = \left(\dfrac{x}{2} - 1\right)^2$

f) $-6ax^3 - 3x^4 = -3x^3(2a + x)$

g) $-x^2y^3 - x^3y^4 - x^4y^5 = -x^2y^3(1 + xy + x^2y^2)$

h) $15 + 15a - 3b - 3ab = 15(1 + a) - 3b(1 + a) = (15 - 3b)(1 + a)$

i) $ax + 2x + ab + 2b = a(x + b) + 2(x + b) = (a + 2)(x + b)$

j) $9x^2 - 4 = (3x - 2)(3x + 2)$

k) $100x^2 - 81y^2 = (10x - 9y)(10x + 9y)$

l) $\frac{16}{49}w^2 - 121 = \left(\frac{4}{7}w - 11\right)\left(\frac{4}{7}w + 11\right)$

m) $25x^6 - 40x^3 + 16 = (5x^3 - 4)^2$

n) $9 - 12y^3 + 4y^6 = (3 - 2y^3)^2$

o) $100x^2 - 180xy + 81y^2 = (10x - 9y)^2$

Exercícios – Capítulo 1

1. Classifique os números abaixo quanto a $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ou $\bar{\mathbb{Q}}$:

$-\pi$	$-3{,}2$	-3	2	$1\frac{2}{5}$	$5{,}222...$	$\sqrt{22}$	$\sqrt[3]{125}$

2. Usando os símbolos $\in$ (pertence) ou $\notin$ (não pertence), dê a relação entre:

a) -10 e $\mathbb{N}$

b) 18 e $\mathbb{N}$

c) $\frac{1}{4}$ e $\bar{\mathbb{Q}}$

d) $\sqrt{49}$ e $\mathbb{Z}$

e) $8{,}236847$ e $\mathbb{Q}$

3. Verifique quais afirmações são corretas:

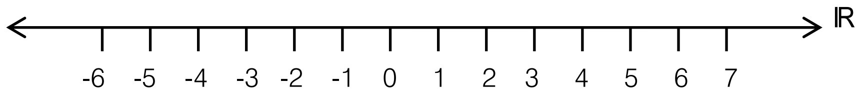
a) todo número natural é um número inteiro positivo.

b) todo número inteiro positivo é um número racional.

c) todo número real é um número racional.

d) todo número irracional é um número real.

4. Localize, na reta real, aproximadamente, o ponto correspondente a cada número do exercício 1.



5. Quantas graduações há de 3 graus centígrados abaixo de zero até 21 graus centígrados acima de zero?

6. Quantas graduações há de –9ºC até 18ºC?

7. Escreva, na ordem crescente, os seguintes números reais: –1,024; –1,0124; 12; π; $\sqrt{42}$; 0; $84/7$; –10; 112; $-\sqrt{\dfrac{36}{9}}$.

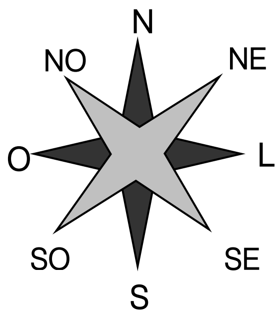
8. Dentre os números inteiros –20, –14, –110, 14 e 0, quais deles podem ser colocados no lugar do **x** para que se tenha:

a) $x > -15$

b) $x < 14$

c) $x \leq 14$

9. Uma pessoa andou, inicialmente, 12 km a sul de um ponto. A seguir, voltou 8 km para norte, 4 km para oeste e andou 13 km para leste. Qual a posição da pessoa em relação ao ponto onde ela iniciou a caminhada?



10. Desenvolva os produtos e reduza os termos semelhantes.

a) $(x+2)^2 - 2x + 2(9-7x) + 14x =$

b) $(3x-2)(3x+2) - 4(x^2+2x-4) + 5 =$

c) $\left(\dfrac{2}{3}+x\right)^2 + \left(\dfrac{2}{3}-x\right)\left(\dfrac{2}{3}+x\right) - \dfrac{8}{9}x + 3x^2 =$

11. Simplifique as seguintes frações, até onde for possível.

a) $\dfrac{4a^3}{12a^5} =$

b) $-\dfrac{4aw^3}{12xa^5} =$

c) $\dfrac{4a^3}{12(x-y)} =$

d) $\dfrac{x+1}{x^2+2x+1}=$

e) $\dfrac{x-1}{x^2-2x+1}=$

f) $\dfrac{2x^2-8}{x^2+4x+4}=$

12. Realize as operações indicadas.

a) $\dfrac{2}{3}+\dfrac{5}{3}-\dfrac{4}{3}=$

b) $\dfrac{2}{3}+3\cdot\dfrac{5}{9}-2\cdot\dfrac{7}{6}=$

c) $\dfrac{2}{5}+\dfrac{3}{7}-\dfrac{1}{2}=$

d) $3\cdot\dfrac{6}{5}-5\cdot\dfrac{2}{3}+3=$

e) $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{7}{8}-3\cdot\dfrac{5}{16}=$

f) $\dfrac{9}{7}\div\dfrac{14}{3}-\dfrac{1}{2}\cdot 7=$

g) $\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^3\right]^{-2}=$

13. Escreva na forma de potência.

a) $10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10$

b) $\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{4}$

14. Escreva os números seguintes usando potência de 10.

a) 1 087 589

b) 125 000 000 000

c) 0,000 000 0012

15. Reduza a uma só potência.

a) $a^2.a^{-12}a^{\frac{2}{3}}$

b) $\left[\left(z^3\right)^{-6}\right]^2$

c) $p^2 \cdot p^{\frac{1}{3}} \div \left[(p^{-2})^3\right]^{-4}$

16. Sendo $r = -\frac{11}{4} - 0{,}5$ e $s = \frac{10}{3} - \frac{9}{2}$, encontre: $r \cdot s + \frac{r}{s}$.

17. Sendo $k = \frac{1}{2}$ e $t = \frac{1}{5}$, calcule o valor das expressões.

a) $3k - 5t + 12k^0$

b) $(3k - 5t)^{-2} + 12k^2$

18. Desenvolva as seguintes expressões:

a) $(x+3)(x+5) =$

b) $(x-2)(x-6) =$

c) $(\sqrt{x} - 1)(-3 + \sqrt{x}) =$

d) $(x^2 + 4x + 4)(x - 2) =$

e) $(\sqrt{5x} - 2)(\sqrt{5x} + 2) =$

f) $(a - 5)(a^2 + 5a + 25) =$

g) $(2 + 5a)(3x - 2y) =$

19. Fatore as seguintes expressões.

a) $x^2 - \frac{9}{144} =$

b) $x^2 - 8 =$

c) $25r^2 - 81r^7 =$

d) $x^2 - 4x + 4 =$

e) $n^2 - 121 =$

f) $a^2 + 4a + 4 =$

g) $-2a^2b^5 + 4ab^2 =$

h) $x^3 - x^2 + x - 1 =$

i) $x(a + b) - 12(a + b) =$

j) $y^4 - 324y^2$

k) $25h^2 + 10h + 1 =$

l) $z^2 - \frac{1}{9} =$

Regra de Três e Porcentagem 2

REGRA DE TRÊS

Duas grandezas são diretamente proporcionais (DP) quando os valores numéricos das duas aumentam ou diminuem na mesma proporção, e são inversamente proporcionais (IP) quando o valor numérico de uma grandeza aumenta e o da outra diminui na mesma proporção e vice-versa.

Exemplo 2.1

Comprei 8 metros de pizza, para minha festa de aniversário, por R$ 280,00. Quanto pagarei, se comprar 15 metros da mesma pizza?

Resolução
Primeiramente, precisamos analisar as duas grandezas envolvidas, quantidade de pizza e preço. Se comprar mais pizza, vou pagar mais e, se comprar menos, vou pagar menos, ou seja, é um problema diretamente proporcional. Por isso vamos escrevê-lo de forma direta.

Metros (m)	Preço (R$)
8	280
15	x

Após a relação anterior, vem a fase do equacionamento:

$$\frac{8}{15} = \frac{280}{x}$$
$$8x = 15 \cdot 280$$
$$x = \frac{4200}{8}$$
$$x = 525$$

Resposta: Pagarei R$ 525,00 por 15 metros da mesma pizza.

Exemplo 2.2

Levei 30 minutos para ir da cidade de Porto Alegre à cidade de Novo Hamburgo com uma velocidade média de 75 km/h. Quanto tempo levaria para fazer o mesmo percurso, se minha velocidade média fosse de 60 km/h?

Resolução

Vamos analisar as duas grandezas envolvidas: tempo e velocidade. Se viajar a uma velocidade *menor,* levarei *mais* tempo para percorrer tal distância, ou seja, é um problema inversamente proporcional. Por isso, é necessária uma inversão em uma das frações:

Tempo (h)	Velocidade (km/h)
0,5	75
x	60

Na fase do equacionamento:

$$\frac{0{,}5}{x} = \frac{60}{75}$$
$$60x = 0{,}5 \cdot 75$$
$$x = \frac{37{,}5}{60}$$
$$x = 0{,}625 \text{ horas}$$

Para descobrir o tempo gasto em minutos equivalente a 0,625 horas, multiplicamos este valor por 60 $(0{,}625 \cdot 60)$, que dá 37,5 minutos, ou seja, aproximadamente 37 minutos.

Resposta: Levaria aproximadamente 0,625 horas, ou seja, aproximadamente 37 minutos.

Exemplo 2.3

Se 80 kg de arroz alimentam 30 pessoas durante 20 dias, quantos quilos do mesmo arroz serão necessários para alimentar o dobro de pessoas durante 45 dias?

Resolução

Analisando as três grandezas: quantidade de arroz, número de pessoas e dias; observamos que quanto *mais* pessoas houver, *mais* arroz será consumido e quanto *mais* dias existirem, *mais* arroz será necessário. Portanto, é um problema diretamente proporcional, ou seja, não precisamos inverter nenhuma das frações.

Quantidade (kg)	Número de Pessoas	Tempo (dias)
80	30	20
x	60	45

Equacionando:

$$\frac{80}{x} = \frac{30}{60} \cdot \frac{20}{45}$$

$$\frac{80}{x} = \frac{600}{2\,700}$$

$$600x = 80 \cdot 2\,700$$

$$x = \frac{216\,000}{600}$$

$$x = 360$$

Resposta: Serão necessários 360 kg de arroz.

Observamos que, para o dobro de pessoas, será necessário o dobro da quantidade de arroz, assim, podemos equacionar esse problema como uma regra de três simples.

$$\frac{160}{x} = \frac{20}{45}, \text{ consequentemente } \; x = 360$$

Exemplo 2.4

Numa campanha de divulgação de um certo produto lançado no mercado, o diretor da empresa mandou confeccionar 15.000 folhetos. A gráfica realizou o serviço em 4 dias, utilizando 2 máquinas de mesmo rendimento e trabalhando 6 horas por dia. Entretanto, o diretor precisou fazer nova encomenda, desta vez, 20.000 folhetos. Nessa ocasião, uma das máquinas estava quebrada. Para atender o pedido, a gráfica prontificou-se a trabalhar 8 horas por dia. Quantos dias a gráfica levou para executar o serviço?

Resolução

As grandezas quantidade de folhetos, dias, quantidade de máquinas e horas trabalhadas por dia serão analisadas duas a duas, preservando sempre a grandeza que possui a incógnita.
Quanto *mais* folhetos houver, *mais* dias serão necessários (DP).
Quanto *menos* máquinas houver, *mais* dias serão necessários (IP).
Quanto *mais* horas forem trabalhadas por dia, *menos* dias serão necessários (IP).

Assim:

Quantidade de folhetos	Tempo (dias)	Quantidade de máquinas	Trabalho diário (horas)
15 000	4	2	6
20 000	X	1	8

Invertendo as frações que estão (IP), temos:

$$\frac{4}{x} = \frac{15\,000}{20\,000} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{6}$$
$$\frac{4}{x} = \frac{120\,000}{240\,000}$$
$$120\,000x = 4 \cdot 240\,000$$
$$x = \frac{960\,000}{120\,000}$$
$$x = 8 \text{ dias}$$

Esse problema também pode ser resolvido por regra de três simples, agrupando as grandezas tempo (dias), quantidade de máquinas e trabalho diário (horas) em 48 horas de produção. $(48 = 4 \cdot 6 \cdot 2)$

Quantidade de folhetos	Horas de produção
15 000	48
20 000	8x

$$\frac{15\,000}{20\,000} = \frac{48}{8x}$$

Resposta: A gráfica levou 8 dias para executar o serviço.

PORCENTAGEM

O estudo da percentagem é um modo de comparar números usando a proporção direta, em que uma das razões da proporção é uma fração de denominador 100.

Vale lembrar:

- Calcular 80% de algum valor significa apenas multiplicá-lo por 0,8. Pois 0,8 é $\frac{80}{100}$;
- 80% é 80 vezes 1%, calcula-se 1% e multiplica-se por 80.

Exemplo 2.5

Doze alunos representam qual porcentagem em uma turma de 15 alunos? Vejamos o seguinte:

$$\frac{12}{15} = 0{,}8 = \frac{8}{10} = \frac{80}{100} = 80\%$$

Ou seja, doze alunos, em uma turma de 15 alunos, representam o mesmo que 8 alunos em uma turma de 10 ou 80 alunos em uma turma de 100. Em porcentagem: 80%.

Exemplo 2.6

Em uma liquidação, uma camisa que custava R$ 44,00, foi vendida com 25% de desconto. De quanto foi o desconto em reais?

Resolução
Temos que calcular quanto vale 25% de um total de R$ 44,00. Lembrando que 25% é igual a $\frac{25}{100}$ e representa 0,25. Assim,

$$44 \cdot 0{,}25 = 11$$

Resposta: O abatimento foi de R$ 11,00.

Exemplo 2.7

Uma pessoa devia R$ 5.000,00 e pagou R$ 2.400,00. Quanto por cento da dívida foi pago?

Resolução
Calcula-se que razão (porcentagem) 2.400 representa em relação a 5.000:

$$\frac{2\ 400}{5\ 000} = 0{,}48 = 48\%$$

Resposta: Foram pagos 48% da dívida.

Exemplo 2.8

Por efetuar com atraso o pagamento de uma prestação, Marco teve de pagar R$ 345,61. Sabendo que a multa cobrada foi de 7%, qual era inicialmente o valor da prestação?

Resolução
Marco pagou 107% da prestação, pois pagou o total dela (100%) mais a multa (7%).

Esse exemplo pode ser visto através da regra de três:

345,61	107 %
x	100 %

Ou simplesmente:

$$\frac{345{,}61}{1{,}07} = 323{,}00$$

Resposta: O valor da prestação sem a multa era de R$ 323,00.

Exercícios – Capítulo 2

1. Um automóvel percorre um espaço de 480 km em 2 horas. Quantos km ele percorrerá em 6 horas se continuar na mesma velocidade?

2. Um certo homem percorre uma via de determinada distância com uma bicicleta. Sabendo-se que, com a velocidade de 5 Km/h, ele demora 6 horas, quanto tempo esse homem gastará com sua bicicleta para percorrer essa mesma distância com uma velocidade 3 Km/h?

3. Cinco costureiras confeccionam juntas 15 fantasias de carnaval por dia. Devido à proximidade da data, a produção teve que ser aumentada. Agora são 8 costureiras trabalhando. Considerando que o ritmo de trabalho continue o mesmo, quantas fantasias elas fazem por dia?

4. Numa fábrica de brinquedos, 8 homens montam 20 carrinhos em 5 dias. Quantos carrinhos serão montados por 4 homens em 16 dias?

5. Em 8 horas, 20 caminhões descarregam 160 m^3 de areia. Em 5 horas, quantos caminhões serão necessários para descarregar 125 m^3?

6. Três torneiras enchem uma piscina em 10 horas. Quantas horas 10 torneiras, com a mesma vazão, levarão para encher 2 piscinas?

7. Uma equipe composta de 15 homens extrai, em 30 dias, 3,6 toneladas de carvão. Se for aumentada para 20 homens, em quantos dias conseguirão extrair 5,6 toneladas de carvão?

8. Doze operários, em 90 dias, trabalhando 8 horas por dia, fazem 36 m de certo tecido. Quantos dias levarão 15 operários para fazer 12 m do mesmo tecido, com o dobro da largura, trabalhando 6 horas por dia?

9. A empresa *X-Brasil* possui 750 empregados e costuma comprar marmitas individuais congeladas, para servir o almoço dos funcionários, em lotes que duram 25 dias. Sabendo-se que, nos meses de novembro e dezembro, sua estimativa tem um acréscimo de 75% da receita, a empresa contrata 500 empregados em regime temporário. Nessas

condições, determine por quantos dias a quantidade de marmitas já adquiridas para o mês de novembro suprirá a demanda.

10. Determine se as grandezas abaixo são proporcionais:

a) altura e idade de uma pessoa;

b) comprimento de uma roda de bicicleta e o número de voltas que ela realiza em um mesmo percurso.

11. A sombra de uma pessoa que tem 1,90 m de altura mede 55 cm. No mesmo momento, ao seu lado, a sombra projetada de um poste mede 2 m. Se, mais tarde, a sombra do poste diminui 50 cm, quanto passou a medir a sombra da pessoa?

12. A maquete de um edifício tem 60 cm de altura e o edifício tem 48 m de altura. Sabendo que as janelas dos apartamentos têm 2 m de largura, qual é a largura das janelas na maquete do edifício?

13. Classifique as afirmativas abaixo em verdadeiras ou falsas.

a) ( ) $13\% = 1\% \cdot 13$.

b) ( ) $25\% = \frac{1}{4}$.

c) ( ) $3{,}6 = 36\%$.

d) ( ) $7\% = 0{,}07$.

e) ( ) 18% de $1800 = 18 \cdot 18$.

f) ( ) $115\% = 0{,}115$.

14. O sistema de cooperativa está ganhando espaço em pequenas e médias propriedades rurais. Constatou-se que um grupo de 15 famílias, trabalhando 8 horas por dia, realiza um determinado trabalho em 9 dias, tendo como lucro R$ 10.800,00. Diante dessa realidade, a cooperativa admitiu a entrada de mais 8 famílias para compor o grupo. Caso esse novo grupo trabalhe 6 horas por dia, durante 12 dias, determine o novo lucro da cooperativa.

15. $(30\%)^2$ é equivalente a qual porcentagem?

16. Um celular foi comprado por R$ 300,00 e revendido, posteriormente, por R$ 340,00. Qual a taxa percentual de lucro?

17. Ao comprar uma camisa, obtive um desconto de 15%, representando R$ 9,00. Qual seria o preço original da camisa sem o desconto e quanto paguei por ela?

18. Um técnico em informática cobra por hora trabalhada R$ 20,00. Supondo que ele trabalhe 30 horas por semana e que decidiu aumentar 5% o preço de sua hora trabalhada, de quanto foi seu aumento salarial semanal em reais?

19. Paguei, com multa, R$ 40,00 por uma prestação cujo valor era de R$ 32,00. Qual a taxa percentual da multa?

20. Um trabalhador precisa aumentar seu salário. Atualmente ele recebe R$ 10,00 por hora trabalhada, trabalhando 6 horas por dia e 4 dias por semana. Desejando receber um salário 25% acima do atual e sabendo que a empresa onde trabalha não vai oferecer aumento no valor da hora trabalhada, quantas horas ele deve trabalhar diariamente, trabalhando um dia a mais por semana?

21. Uma empresa possui 50 empregados homens e 35 mulheres. No último processo de seleção, foram contratados 5 homens e 10 mulheres. Em relação ao novo total de funcionários, qual é a percentagem de mulheres?

22. Em certo dia ensolarado, meu tio resolveu fazer um longo passeio de bicicleta. Saiu de sua casa às 8h10min da manhã e chegou de volta depois de 4,15 horas. Qual o horário de retorno do passeio?

23. Para se desfazer de um estoque de CDs encalhados, uma loja decidiu reduzir em 15% o preço dos CDs, que custavam R$ 20,00 cada. Depois de três dias, o gerente percebeu que isso não foi suficiente para atrair compradores, então decidiu baixar os preços ainda mais. Dessa vez, reduziu 10%. Qual foi o preço final dos CDs?

24. Determine a quantidade de água que deve ser evaporada de 600 g de uma solução salina (água e sal) a 3,2% (sal) para se obter uma solução salina a 5% (sal).

25. 15% dos membros de uma população foram afetados por uma doença epidêmica. 8% das pessoas afetadas morreram. Calcular a mortalidade com relação à população inteira.

26. Devido à "revolução verde", um fazendeiro foi capaz de aumentar a safra de trigo em 45%. Baseado no novo número, a colheita posterior àquela foi 20% mais baixa. O resultado seria o mesmo, se ele primeiro houvesse perdido 20% e depois ganho 45%?

27. (UFRGS-99) Uma mercadoria que custa R reais sofre um desconto de 60%. Um aumento de 60% sobre o novo preço fará com que a mercadoria fique custando, em reais:

a) 0,36R.

b) 0,40R.

c) 0,60R.

d) 0,64R.

e) R.

28. (UFRGS-99) Num semestre, a inflação foi de 32%, e, ao final dele, um trabalhador teve reposição salarial de 20%. Para que o poder de compra desse trabalhador fosse mantido no mesmo patamar do início do semestre, o salário já reajustado em 20% deveria, ainda, sofrer um reajuste de:

a) 10%.

b) 12%.

c) 16%.

d) 20%.

e) 32%.

29. Imagine que seu salário bruto sofre um desconto de 25%. Agora, com um novo desconto de 11% sobre $\frac{3}{5}$ do seu antigo salário bruto, é possível afirmar que o desconto total sobre seu salário bruto será de:

a) 21,6%.

b) 26,4%.

c) 31,6%.

d) 33,3%.

e) 36,3%.

30. Uma loja comprou de um fornecedor um artigo de **n** reais (preço de custo) e revendeu com lucro de 40%. No mês seguinte, resolveu fazer uma liquidação geral em suas mercadorias, oferecendo um desconto de 30% sobre o preço de venda. Pode-se afirmar que esse comerciante tem, sobre **n**,

a) prejuízo de 2%.

b) prejuízo de 10%.

c) lucro de 10%.

d) lucro de 2%.

31. O preço de uma mercadoria era de R$ 36,00 no início de um determinado mês. Durante o mês, sofreu aumentos sucessivos de 3% e 5%. O percentual total de aumento sofrido por essa mercadoria no referido mês é de, exatamente:

a) 8%.

b) 8,15%.

c) 15%.

d) 7,85%.

32. Um recipiente é vendido com 18 litros de uma solução, contendo 20% de sal. Desejando-se que a solução passe a concentrar 12% de sal, torna-se necessário acrescentar alguns litros de água. A quantidade de água necessária é de:

a) 12 ℓ.

b) 1,2 ℓ.

c) 16,3 ℓ.

d) 1,63 ℓ.

33. Seu André resolveu antecipar a liquidação de inverno em sua loja oferecendo desconto de 30% sobre o preço da etiqueta. Entretanto, sua intenção era de dar apenas 9% de desconto. Para tal intenção, antes de anunciar o desconto remarcou as etiquetas elevando o preço. É correto afirmar que o aumento realizado antes do desconto foi:

a) 21%.

b) 39%.

c) 40%.

d) 30%.

34. Uma novidade interessante e agradável, principalmente nos dias de inverno, foi o surgimento das casas de café, as atuais Cafeterias. Esses estabelecimentos apresentam novidades que vão além do tradicional cafezinho. Um exemplo típico é a chamada "*taça de café competitivo*", combinação, em doses exatas, de café e leite. Um especialista na área passou a receita: adicionar em um mesmo recipiente $3/5$ de café e $2/5$ de leite. Se, em determinada mistura, existe 10 litros de café e leite em quantidades iguais, para realizar o "*café competitivo*", é necessário acrescentar à mistura:

a) 2,5 litros de leite.

b) 2,5 litros de café.

c) 3 litros de leite.

d) 3 litros de café.

35. Dos 1200 candidatos que foram aprovados no concurso público para o magistério, 12% não assumiram o cargo após conhecer o real valor do salário pago aos professores. Sabe-se que havia 1220 vagas para serem preenchidas. Nessas condições, pode-se afirmar:

a) todas as vagas foram preenchidas.

b) existe menos que 164 vagas para serem preenchidas.

c) existe 164 vagas para serem preenchidas.

d) existe mais que 164 vagas para serem preenchidas.

36. Em um aras, 90% dos cavalos são fêmeas e 10% machos. Devido a uma doença misteriosa, muitas fêmeas morreram e todos os machos sobreviveram. Após o controle biológico da doença, verificou-se que as fêmeas passaram a representar 75% dos animais. O percentual de fêmeas que morreram é de, aproximadamente,

a) 84%.

b) 67%.

c) 37%.

d) 33%.

Equações, Problemas e Sistemas do 1º Grau

3

EQUAÇÕES

Observe a sentença:

$$2x+5=13\ \begin{cases}\text{Tem um sinal de igualdade.}\\ \text{Tem uma letra que indica um número desconhecido.}\end{cases}$$

Em uma equação:

- A letra é a **incógnita** da equação (incógnita significa desconhecido).
- O que se escreve **antes** do sinal da igualdade chama-se **primeiro** membro.
- O que se escreve **depois** do sinal da igualdade chama-se **segundo** membro.

EQUAÇÃO DO 1º GRAU

Dizemos que uma equação é do 1º grau quando o expoente da incógnita for igual a um. Assim:

Toda equação que pode ser reduzida a forma $ax+b=0$, com $a,b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, é denominada equação do 1º grau na variável **x**.

RAIZ, CONJUNTO UNIVERSO E CONJUNTO SOLUÇÃO DE UMA EQUAÇÃO DO 1º GRAU

Denomina-se **raiz** de uma equação do 1º grau, na incógnita x, o valor de x que torna a equação verdadeira. Dessa forma, denomina-se **conjunto universo** o conjunto formado pelo valor pelo qual a variável pode ser substituída e este conjunto é representado pelo símbolo U.

O conjunto constituído pelo elemento do conjunto universo dado, que torna verdadeira a equação (raiz), é denominado **conjunto solução** ou **conjunto verdade**, sendo representado pelo símbolo $S = \{$número que torna a equação verdadeira$\}$.

RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DO 1º GRAU A UMA INCÓGNITA

O processo de solução está baseado nas propriedades da igualdade. Observe os exemplos:

Exemplo 3.1

Resolva as equações:

a) $2x + 4 = 7x - 5$

Resolução

$$2x + 4 = 7x - 5$$
$$2x - 7x = -5 - 4$$
$$-5x = -9$$
$$x = \frac{-9}{-5}$$
$$x = \frac{9}{5}$$

Logo: $S = \left\{\frac{9}{5}\right\}$

b) $\frac{3}{2x}+\frac{5}{3x}=1$

Resolução

Primeiro é necessário definir o mínimo múltiplo comum (MMC), $6x$. Após procedemos como na adição ou subtração de frações (capítulo 1). Divide-se o novo denominador pelo denominador anterior e, esse resultado deve ser multiplicado pelo numerador, repetindo-se o processo para cada termo:

$$\frac{3\cdot 3+2\cdot 5}{6x}=\frac{6x\cdot 1}{6x}$$

Nesse passo, efetuam-se os produtos e elimina-se o denominador, visto que já "equilibramos" a equação.

$$9+10=6x$$
$$19=6x$$
$$\frac{19}{6}=x$$

Logo: $S=\left\{\frac{19}{6}\right\}$.

c) $\frac{x}{3}+\frac{x-2}{x-5}=\frac{x^2+4}{3(x-5)}$

Resolução

$$\frac{x(x-5)+3(x-2)}{3(x-5)}=\frac{x^2+4}{3(x-5)}$$
$$x(x-5)+3(x-2)=x^2+4$$
$$x^2-5x+3x-6=x^2+4$$
$$-5x+3x=4+6$$
$$-2x=10$$
$$x=-\frac{10}{2}$$
$$x=-5$$

Logo: $S=\{-5\}$.

d) $\frac{x}{x+1} - \frac{x^2-7}{x^2-1} = \frac{3}{x-1}$

Resolução

Lembrando que $\left(x^2-1\right) = (x-1)(x+1)$

$$\frac{x(x-1) - 1\left(x^2-7\right)}{(x-1)(x+1)} = \frac{3(x+1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$x(x-1) - 1\left(x^2-7\right) = 3(x+1)$$

$$x^2 - x - x^2 + 7 = 3x + 3$$

$$-x - 3x = 3 - 7$$

$$-4x = -4$$

$$x = 1$$

Logo: $S = \{\ \}$, pois não existe divisão por zero $\left(☹\ \frac{3}{x-1},\ \frac{3}{1-1} = ???\right)$

EQUAÇÕES DO 1º GRAU COM DUAS VARIÁVEIS

Denomina-se uma equação do tipo $5x - 3y = 4$ como equação do 1º grau com duas incógnitas. Essa equação apresenta solução quando o par ordenado (x, y) torna a igualdade verdadeira. Assim:

Denomina-se **equação do 1º grau com duas variáveis**, x e y, toda a equação que pode ser reduzida a uma equivalência da forma $ax + by = 0$, com **a** e **b** não-nulos ao mesmo tempo.

Exemplo 3.2

O par ordenado (–1,5) é solução da equação $2x + y = 3$, pois:

$$2(-1) + (5) = 3$$

$$-2 + 5 = 3$$

$$3 = 3$$

SISTEMAS DE EQUAÇÃO DO 1º GRAU COM DUAS INCÓGNITAS

Um par de equações com duas incógnitas é denominado **sistema**

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$$

Para resolvê-lo, é necessário encontrar um par ordenado (x, y) em que o valor de **x** e o valor de **y** satisfaçam as duas equações simultaneamente.

PROCESSO OU MÉTODO DE RESOLUÇÃO

Pode-se resolver um sistema de equações do 1º grau com duas variáveis através de vários métodos, porém, enfatizaremos apenas dois métodos: método da substituição e método da adição.

Exemplo 3.3

Resolva o sistema $\begin{cases} x + y = 6 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$ pelo método da **substituição**.

Esse método consiste em escolher uma das equações e, nesta equação, isolar uma das variáveis. Após, a variável isolada deve ser substituída na outra equação. Nesse momento, deve-se resolver a equação resultante. O valor numérico encontrado deve ser substituído na equação anterior para fornecer o par ordenado que será solução do sistema.

$$\begin{cases} x + y = 6 \Rightarrow \text{equação escolhida} \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

$$x + y = 6 \quad \Leftrightarrow \quad x = 6 - y \quad \text{(a variável x foi isolada).}$$

$$2 \underbrace{x}_{\text{substitui}} + y = 4$$

$$2(6 - y) + y = 4$$

$$12 - 2y + y = 4 \quad \Rightarrow \text{resulto em uma equação do } 1^{\text{o}} \text{ grau a uma variável.}$$

$$\begin{aligned} 12-2y+y&=4\\ -2y+y&=4-12\\ -y&=-8\\ y&=8 \end{aligned}$$

No passo anterior, foi descoberto o valor de y. Assim, retornamos à equação $x+y=6$ para descobrir o valor de x.

$$x+8=6 \quad \Leftrightarrow \quad x=6-8 \quad \Leftrightarrow \quad x=-2$$

Valida-se a solução $\begin{cases} x+y=6 \\ 2x+y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2+8=6 \\ 2(-2)+8=4 \end{cases}$

Solução: $S=\{(-2,8)\}$.

Exemplo 3.4

Resolva o sistema $\begin{cases} 3x+5y=1 \\ 2x+3y=2 \end{cases}$ pelo método da **substituição.**

$$\begin{cases} 3x+5y=1 & \rightarrow \quad x=\dfrac{1-5y}{3} \\ 2x+3y=2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2x+3y&=2\\ 2\left(\frac{1-5y}{3}\right)+3y&=2\\ \frac{2-10y}{3}+3y&=2\\ \frac{1(2-10y)+3\cdot 3y}{3}&=\frac{3\cdot 2}{3}\\ \frac{2-10y+9y}{\cancel{3}}&=\frac{6}{\cancel{3}}\\ 2-y=6 \quad \rightarrow \quad 2-6=y &\rightarrow \quad -4=y \end{aligned}$$

Agora, retornamos à variável x, na equação $x = \frac{1-5y}{3}$:

$$x = \frac{1-5(-4)}{3} \quad \rightarrow \quad x = \frac{1+20}{3} = \frac{21}{3} = 7$$

Solução: $S = \{(7,-4)\}$.

Exemplo 3.5

Resolva o sistema $\begin{cases} x+y=6 \\ 2x+y=4 \end{cases}$ pelo método da **adição.**

O método da adição consiste em somar os termos semelhantes e "zerar" uma das variáveis.

$$\begin{cases} x+y=6 \\ 2x+y=4 \end{cases}$$

Analisando o sistema acima, observa-se que a variável y, nas duas equações, apresenta o mesmo coeficiente. Dessa forma, se multiplicarmos uma das equações por (–1), poderemos zerar a variável y.

$$\begin{cases} x+y=6 & \cdot(-1) \\ 2x+y=4 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \underline{\begin{cases} -x-y=-6 \\ 2x+y=4 \end{cases}}$$

Somam – se os termos semelhantes

$$\begin{array}{r} + \begin{cases} -x-y=-6 \\ 2x+y=4 \end{cases} \\ \hline x+0y=-2 \end{array} \quad \rightarrow \quad x=-2$$

No passo anterior, foi descoberto o valor de x. Assim, retornamos a qualquer uma das equações para descobrir o valor de y. A equação escolhida é $x+y=6$.

$$-2+y=6 \quad \Rightarrow \quad y=6+2 \quad \Rightarrow \quad y=8$$

Solução: $S = \{(-2,8)\}$.

Exemplo 3.6

Resolva o sistema $\begin{cases} 3x - 4y = 6 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$ pelo método da **adição.**

$$\begin{cases} 3x - 4y = 6 & \cdot(3) \\ 2x + 3y = 4 & \cdot(4) \end{cases} \rightarrow \quad + \begin{cases} 9x - 12y = 18 \\ 8x + 12y = 16 \end{cases}$$

$$17x + 0y = 34 \quad \rightarrow \quad 17x = 34$$

$$x = \frac{34}{17} = 2$$

Substituindo x=2, na equação $3x - 4y = 6$, tem-se:

$$3 \cdot 2 - 4y = 6$$
$$6 - 4y = 6$$
$$-4y = 6 - 6$$
$$y = \frac{0}{-4}$$
$$y = 0$$

Solução: $S = \{(2{,}0)\}$. Lembre-se de validar a solução!

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DO 1º GRAU

Na resolução de problemas, devemos:

- Representar a(s) incógnita(s) do problema por letra(s);
- Armar a(s) equação(ões) do problema;
- Resolver a(s) equação(ões);
- Verificar e validar a solução.

Exemplo 3.7

Rita e Joana, juntas, têm 14 anos. A idade de Joana é ¾ da idade de Rita. Qual a idade de cada uma?

Resolução

$$\left.\begin{array}{l} \text{Rita}: x \\ \text{Joana}: \frac{3}{4}x \end{array}\right\} \quad \text{Equação}: x + \frac{3}{4}x = 14$$

$$x + \frac{3}{4}x = 14$$
$$\frac{4 \cdot (x) + 1 \cdot (3x)}{4} = \frac{4 \cdot (14)}{4}$$
$$\frac{4x + 3x}{\cancel{4}} = \frac{56}{\cancel{4}}$$
$$4x + 3x = 56$$
$$7x = 56$$
$$x = \frac{56}{7}$$
$$x = 8$$

Como Joana tem $\frac{3}{4}$ da idade de Rita, então $\frac{3}{4} \cdot 8 = 6$.

Rita tem 8 anos e Joana 6 anos.

Exemplo 3.8

Reparta 22 carrinhos entre três meninos, de modo que o primeiro receba o dobro do que recebe o segundo, e o terceiro receba dois a mais do que receber o segundo.

Resolução

$$\left.\begin{array}{l} 1^{o}\ \text{menino}: 2x \\ 2^{o}\ \text{menino}: x \\ 3^{o}\ \text{menino}: x+2 \end{array}\right\} \quad \text{Equação}: (2x)+(x)+(x+2)=22$$

$$2x + x + x + 2 = 22$$
$$4x + 2 = 22$$
$$4x = 22 - 2$$
$$x = \frac{20}{4}$$
$$x = 5$$

Assim, o 1º menino recebe 10 carrinhos, o 2º menino, 5 carrinhos e o 3º menino recebe 7 carrinhos.

Exercícios – Capítulo 3

1. Use uma variável para indicar simbolicamente as expressões:

   a) "que elevado ao cubo menos 2";

   b) "que adiciona 3 e divide por 4";

   c) "que tira 4".

2. Use as operações necessárias $(+,-,\times,\div,\sqrt[n]{\ },!,\wedge,\ldots)$ para encontrar a solução:

   a) 1 1 1 = 6

   b) 2 + 2 + 2 = 6 $\mapsto$ (exemplo)

   c) 3 3 3 = 6

   d) 4 4 4 = 6

   e) 5 5 5 = 6

   f) 6 6 6 = 6

   g) 7 7 7 = 6

   h) 8 8 8 = 6

   i) 9 9 9 = 6

3. Resolva, sendo $U = \mathbb{R}$

   a) $2x - 4 = \dfrac{22}{5}$

   b) $\dfrac{x-2}{5} = \dfrac{x-3}{2} + \dfrac{1}{6}$

   c) $1 = \dfrac{3}{2} + \dfrac{5x}{6}$

   d) $\dfrac{x-1}{2} + \dfrac{x-3}{4} = \dfrac{2}{5}$

   e) $-2[10 + (4z-2) - (3z+1)] = 5\left(z + \dfrac{1}{3}\right)$

f) $0,1r-\dfrac{2-0,47r}{3}-\dfrac{4r}{5}=2,25$

g) $2,59s-\dfrac{7}{3}-\dfrac{4,82s}{5}=\dfrac{2,25-s}{2}$

4. Resolva:

a) $\dfrac{x+3}{2}+\dfrac{2}{x-3}=\dfrac{x-3}{2}$ $\qquad U=\mathbb{R}-\{3\}$

b) $\dfrac{6x}{x+2}=\dfrac{4x}{x+5}+2$ $\qquad U=\mathbb{R}-\{-5,-2\}$

c) $\dfrac{5(x+3)}{4(2x-1)}-\dfrac{3}{14}=\dfrac{11}{28}$ $\qquad U=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

d) $\dfrac{3}{x}+\dfrac{6}{x^2-1}=\dfrac{3}{x-1}$ $\qquad U=\mathbb{R}-\{-1,0,1\}$

5. Resolva os sistemas de equações do 1º grau com duas variáveis, sendo $U=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

a) $\begin{cases} s+t=7 \\ s-t=3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x-2y=1 \\ 2x-y=7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x-9y=13 \\ -2x+5y=3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 0,5x+0,2y=3 \\ 0,2x+0,3y=-1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2(x-1)=2x-3(2+y) \\ 3x+4=y+20 \end{cases}$

f) $\begin{cases} \dfrac{a}{3} + \dfrac{b}{2} = \dfrac{4}{3} \\ \dfrac{b}{a} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

g) $\begin{cases} \dfrac{5a-2}{5} + \dfrac{b-3}{2} = 2a \\ \dfrac{7b-7}{3} = 2b - \dfrac{a-5}{2} \end{cases}$

h) $\begin{cases} 8{,}75x + 3{,}2y = -15 \\ 15x - 2y = 10 \end{cases}$

i) $\begin{cases} 5x + 6{,}32y = -7 \\ 10{,}4x - 2y = 7 \end{cases}$

6. A população de uma cidade A é o triplo da população da cidade B mais 257 habitantes. Se as duas cidades juntas têm uma população de 70.357 habitantes, quantos habitantes tem a cidade B?

7. Dalcimar gastou no supermercado $\frac{2}{5}$ do seu dinheiro mais R$ 6,51 e ainda lhe sobrou $\frac{1}{4}$ do total. Calcule quanto possuía.

8. Para a eleição do Síndico de um condomínio K, votaram 754 condôminos, em que dois candidatos disputam o mesmo cargo. O eleito obteve 153 votos a mais que seu concorrente, e 147 votos foram anulados. Quantos votos obteve cada candidato?

9. Em um sítio, entre vacas e cavalos, há 200 animais. Se o número de vacas é igual a 1/3 do número de cavalos, determine qual é o número de vacas e qual é o número de cavalos.

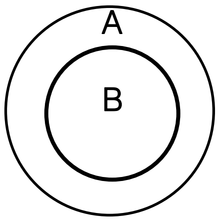
10. Em um quintal existem porcos, avestruzes e galinhas, fazendo um total de 60 cabeças e 180 patas. Quantos são os animais de duas patas e quantos são os de quatro patas?

11. João enviou uma mensagem virtual aos seus amigos pedindo ajuda para divulgação de um evento beneficente. Metade dos amigos enviou a mensagem – cada um para 100 pessoas; ¼ dos amigos também encaminhou a mensagem, mas cada um deles, para 50 pessoas; os outros 52 amigos não quiseram divulgar o evento. Quantas mensagens foram enviadas no total?

12. Dois colegas aproveitaram uma grande promoção de um *shopping* da cidade para comprar calças e blusões, com o objetivo de renovar os modelos para a estação de inverno. Um deles gastou R$ 96,00 comprando duas calças e quatro blusões. O outro comprou uma calça e cinco blusões, gastando ao todo R$ 103,50. Sabendo-se que todas as calças eram vendidas ao mesmo preço e que os blusões também tinham preço único, determine esses valores.

13. No alvo abaixo, uma certa pontuação é dada para a flecha que cai na região A e outra que cai na região B. Rafael e Augusto tiveram 3 oportunidades de lançamento, obtendo a seguinte relação:

	Região A	Região B	Total de Pontos
Rafael	2	1	13
Augusto	1	2	17



Quantos pontos são atribuídos para cada flecha que cai na região B?

14. Uma indústria em expansão deseja admitir 843 funcionários durante os três primeiros meses do próximo ano. No primeiro mês, tem a pretensão de admitir um terço desse total de funcionários; no segundo mês, pretende admitir 30 funcionários a mais do que no mês anterior. Quantos funcionários serão admitidos em cada um desses meses?

15. Em uma revendedora há **x** carros e **y** motos, num total de 17 veículos. Esses veículos têm um total de 40 rodas (sem estepe). Sabe-se que o custo médio de cada moto equivale a R$ 7.450,00, e o preço médio de cada carro é de R$ 22.450,00. Determine o valor total dos bens (carros e motos) que há nessa revendedora.

16. Um jogador de basquete acertou **T** arremessos de 3 pontos e **D** arremessos de 2 pontos. Em suas 14 cestas, ele marcou, ao todo, 35 pontos. Determine quantos arremessos de 3 pontos e quantos arremessos de 2 pontos ele acertou.

17. Ana Laura comprou uma caixa de bombons para seu namorado. Entretanto, seu irmão Paulo tirou para si metade dos bombons da caixa. Mais tarde, sua prima Janaína também tirou para si metade dos bombons que encontrou na caixa. Restaram 10 bombons. Sabendo do acontecido, Ana Laura cobrou R$ 1,32 por cada bombom desaparecido. Calcule quanto cada um pagou a Ana Laura por ter pego os bombons.

18. Roberto gasta $\frac{1}{4}$ de seu salário mensal para pagar o aluguel da casa onde mora. Com alimentação, ele gasta $\frac{1}{5}$ de seu salário. Roberto gasta ainda R$ 52,00 com transporte e R$ 248,00 com os estudos. De quanto é o salário de Roberto, se ainda lhe restam R$ 250,00 para outras despesas?

19. Numa certa biblioteca, todos os livros precisam ser catalogados. Se João catalogar $\frac{1}{3}$ deles e Pedro $\frac{2}{5}$ do restante, ainda restarão 2.580 livros a serem catalogados. Quantos livros possui essa biblioteca?

20. Em uma determinada instituição de ensino, a média semestral é realizada através de peso, isto é, a nota da primeira avaliação é multiplicada por 1, a da segunda avaliação é multiplicada por 3 e a da terceira avaliação, por 6. Os resultados, depois de somados, são divididos por 10. Caso a média obtida por esse critério seja inferior a 7,0, o aluno deve realizar um exame final. Suponha que você seja aluno dessa instituição e tenha atingido 6,4 na primeira avaliação e 4,2 na segunda. Qual a nota que você deve tirar na terceira avaliação para ser dispensado do exame final?

Equações, Problemas e Sistemas do 2º Grau

4

EQUAÇÃO DO 2º GRAU

A forma geral de uma equação do 2º grau é: $ax^2+bx+c=0$, com *a, b* e *c* $\in \mathbb{R}$ e $a\neq 0$. Nessas equações, x é a variável e os elementos *a, b* e *c* são denominados coeficientes. Caso $b=0$ ou $c=0$, tem-se uma equação do 2º grau incompleta.

Exemplo 4.1

Nas equações abaixo, identifique os valores dos coeficientes a, b e c.

a) $3x^2-x+5=0$ $\quad a=3;\ \ b=-1$ e $c=5$

b) $x^2-x=0$ $\quad a=1;\ \ b=-1$ e $c=0$

c) $x^2-25=0$ $\quad a=1;\ \ b=0$ e $c=-25$

Assim, como no capítulo 3, numa equação do 2º grau, na incógnita x, também desejamos descobrir o(s) possível(is) valor(es) de x que torna(m) a equação verdadeira, isto é, encontrar sua raiz. Analogamente, a solução dessa equação também está condicionada a um conjunto universo ao qual pertence o conjunto solução (conjunto verdade).

RESOLUÇÃO DE EQUAÇÃO DO 2º GRAU A UMA VARIÁVEL

Qualquer equação do 2º grau pode ser resolvida através da fórmula:

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, sendo $\Delta = b^2 - 4ac$.

A expressão Δ (delta), chamada de discriminante da equação, informa-nos se a equação possui raízes reais e, no caso de existirem, se são iguais ou diferentes. Assim:

- Se $\Delta > 0$, a equação tem duas raízes reais e distintas.
- Se $\Delta = 0$, a equação tem duas raízes reais e iguais.
- Se $\Delta < 0$, a equação não tem raízes reais.

Em situações em que as raízes são números inteiros, também podemos utilizar outra forma prática para encontrá-las, as relações da soma e do produto.

- A soma das raízes é dada por: $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \Rightarrow S = -\dfrac{b}{a}$.
- O produto das raízes é dado por: $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} \Rightarrow P = \dfrac{c}{a}$.

A expressão $ax^2 + bx + c = 0$ na forma de soma e produto fica:

$ax^2 - Sx + P = 0$.

Exemplo 4.2

Sendo U=IR, resolva as equações do 2º grau.

a) $2x^2 - 72 = 0$

Resolução

Observando essa equação, verificamos que apenas um dos termos do primeiro membro possui a variável, portanto podemos colocá-la em evidência. Essa equação também pode ser desenvolvida pela fórmula resolutiva.

$$2x^2 - 72 = 0$$
$$2x^2 = 72$$
$$x^2 = \frac{72}{2}$$
$$x^2 = 36$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{36}$$
$$x = \pm 6$$

Logo, o conjunto solução da equação é $S = \{-6, 6\}$.

b) $x^2 + 9 = 0$

Resolução

$$x^2 + 9 = 0$$
$$x^2 = -9$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{-9}$$

Como não existe número real cujo quadrado seja negativo, concluímos que o conjunto solução dessa equação é vazio. Logo, $S = \{\ \}$.

c) $2x^2 - 72x = 0$

Resolução

A equação em estudo apresenta a variável x em todos os seus termos. Assim, resolveremos utilizando o método da fatoração.

$$2x^2 - 72x = 0$$
$$x(2x - 72) = 0$$

A propriedade do produto nulo garante que: o produto de dois números reais é igual a zero se, e somente se, pelo menos um dos números for igual a zero. Assim,

$$x \cdot (2x - 72) = 0$$
$$x = 0 \quad \text{ou} \quad 2x - 72 = 0$$
$$2x = 72$$
$$x = \frac{72}{2}$$
$$x = 36$$

Logo, o conjunto solução da equação é $S = \{0, 36\}$.

d) $x^2 - x - 6 = 0$

Resolução

Nesse exemplo, a equação é completa, sendo necessário reconhecer os coeficientes e calcular o discriminante.

$$a = 1;\ b = -1 \text{ e } c = -6$$
$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)$$
$$\Delta = 1 + 24 = 25$$

Aplicando a fórmula resolutiva:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{1 \pm 5}{2} \begin{cases} x_1 = \dfrac{1+5}{2} = \dfrac{6}{2} = 3 \\[2ex] x_2 = \dfrac{1-5}{2} = \dfrac{-4}{2} = -2 \end{cases}$$

Logo, o conjunto solução é $S = \{-2, 3\}$.

e) $x^2 - 5x - 14 = 0$.

Resolução

A solução a seguir será realizada pelo método da soma e produto. Temos $a = 1,\ b = -5$ e $c = -14$. Assim, a soma $S = -\frac{b}{a}$ e o produto $P = \frac{c}{a}$ nos levam à obtenção das raízes x_1 e x_2.

$$S = -\frac{-5}{1} = 5 \quad \text{e} \quad P = \frac{-14}{1} = -14$$

Neste passo, procuramos encontrar dois valores que, somados, apresentem resultado 5 e estes mesmos valores devem gerar como produto –14:

$$
\begin{array}{ll}
S = 5 & \Rightarrow \boxed{-2} + \boxed{7} = 5 \text{ e} \\
P = -14 & \Rightarrow \boxed{-2} \cdot \boxed{7} = \boxed{-14}
\end{array}
$$

Logo, o conjunto solução da equação é $S = \{-2, 7\}$.

PROCESSO OU MÉTODO DE RESOLUÇÃO DE SISTEMAS DO 2º GRAU

Nos sistemas de equações do 2º grau com duas variáveis, o conjunto solução pode apresentar até dois pares ordenados na forma $S = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\}$

Exemplo 4.3

Resolva os sistemas, sendo U= IRxIR:

a) $\begin{cases} x + y = 4 \\ x^2 - xy = 6 \end{cases}$

Resolução

- Utilizando o método da substituição e escolhendo a variável y na 1ª equação, tem-se: $y = 4 - x$.
- Após, substituímos essa equação na outra existente $(x^2 - xy = 6)$ e resolvemos a equação a uma variável, aplicando a fórmula resolutiva.

$$x^2 - x(4 - x) = 6$$

$$x^2 - 4x + x^2 - 6 = 0$$

$$2x^2 - 4x - 6 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6)$$

$$\Delta = 16 + 48 = 64$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 2}$$

$$x = \frac{4 \pm 8}{4} \begin{cases} \nearrow \; x_1 = \dfrac{4-8}{4} = \dfrac{-4}{4} = -1 \\ \searrow \; x_2 = \dfrac{4+8}{4} = \dfrac{12}{4} = 3 \end{cases}$$

- Neste passo, calculamos os valores correspondentes para a variável y (isolada na 1ª equação).

- Para $x = 3$, tem-se:

$$y = 4 - x$$
$$y = 4 - 3$$
$$y = 1$$

Assim, encontra-se o par ordenado $(3{,}1)$.

- Para $x = -1$, tem-se:

$$y = 4 - x$$
$$y = 4 - (-1)$$
$$y = 4 + 1 = 5$$

De forma análoga, encontra-se o par ordenado $(-1, 5)$.

Logo, o conjunto solução é $S = \{(3, 1), (-1, 5)\}$

b) $\begin{cases} x + 2{,}3y = 2{,}8 \\ xy = -3{,}9 \end{cases}$

Resolução

- Utilizando novamente o método da substituição, isolamos a variável x na 1ª equação: $x = 2{,}8 - 2{,}3y$ e a substituímos na 2ª equação $xy = -3{,}9$.

$$(2{,}8-2{,}3y)y=-3{,}9$$
$$2{,}8y-2{,}3y^2+3{,}9=0$$
$$-2{,}3y^2+2{,}8y+3{,}9=0$$

- Aplicando a fórmula resolutiva:

$$\Delta=b^2-4ac$$
$$\Delta=(2{,}8)^2-4\cdot(-2{,}3)\cdot 3{,}9$$
$$\Delta=7{,}84+35{,}88=43{,}72$$
$$y=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$y=\frac{-(2{,}8)\pm\sqrt{43{,}72}}{2\cdot(-2{,}3)}$$
$$y=\frac{-2{,}8\pm 6{,}6121}{-4{,}6}=$$
$$\nearrow\quad y_1=\frac{-2{,}8+6{,}6121}{-4{,}6}=\frac{3{,}8121}{-4{,}6}=-0{,}8287$$
$$\searrow\quad y_2=\frac{-2{,}8-6{,}6121}{-4{,}6}=\frac{-9{,}4121}{-4{,}6}=2{,}0461$$

- Finalmente, calculamos os valores correspondentes para a variável x.

- Para $y=-0{,}8287$, tem-se:

$$x=2{,}8-2{,}3y$$
$$x=2{,}8-2{,}3\cdot(-0{,}8287)$$
$$x=4{,}7060$$

Assim, encontra-se o par ordenado $(4{,}7060; -0{,}8287)$.

- Para $y=2{,}0461$, tem-se:

$$x=2{,}8-2{,}3y$$
$$x=2{,}8-2{,}3\cdot 2{,}0461$$
$$x=-1{,}9060$$

Encontrando-se o par $(-1{,}9060;\ 2{,}0461)$.

Logo, o conjunto solução é $S=\{(4{,}7060;\ -0{,}8287),(-1{,}9060;\ 2{,}0461)\}$.

Exemplo 4.4

Deoclides pedala sua bicicleta todos os dias pela manhã e mantém sempre a mesma velocidade (**v** km/h). Um dado dia, desceu um morro e atingiu uma velocidade de 5 km/h a mais que sua velocidade habitual, em 1 km de trajeto e voltou ao ponto de partida. Na volta por pedalar morro acima, a bicicleta atingiu $(v-5)$ km/h, e na ida, devido o declive, veio a $(v+5)$ km/h. Sabendo-se que a viagem de ida e volta levou 35 minutos, determine a velocidade habitual **v** que Deoclides costuma pedalar.

Resolução

Tem-se as informações

- $v_{ida} = v + 5$
- $v_{volta} = v - 5$
- O tempo de ida e volta é 35 minutos. Como a referência da velocidade é em km/h, devemos expressar o tempo em horas, $\frac{35}{60}$ horas, simplificando $\frac{7}{12}$ h.
- Recorrendo aos conhecimentos da física $v = \frac{d}{t}$, portanto $t = \frac{d}{v}$, podemos equacionar o problema usando $t_{total} = t_{ida} + t_{volta}$.
- Substituindo as igualdades:

$$t_{total} = t_{ida} + t_{volta}$$

$$\frac{7}{12} = \frac{1}{v+5} + \frac{1}{v-5}$$

$$\frac{7(v+5)(v-5)}{12(v+5)(v-5)} = \frac{12(v-5)+12(v+5)}{12(v+5)(v-5)}$$

$$7\left(v^2-25\right) = 12v - 60 + 12v + 60$$

$$7v^2 - 175 = 24v$$

$$7v^2 - 24v - 175 = 0$$

Esta equação apresenta como raízes $v = -3{,}57$ e $v = 7$, ou seja, a velocidade habitual de Deoclides é $v = 7$ km/h.

Exercícios – Capítulo 4

1. Resolva as seguintes equações do 2^0 grau, em $\mathbb{R}$.

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$

b) $x^2 = 5(2x - 5)$

c) $0,5x^2 - 0,73x + 1 = 0$

d) $3y^2 + 7y - 2 = 0$

e) $x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} = 0$

f) $(t-1)^2 = 3t + 1$

g) $x - \frac{9}{x} = 0;\ x \in \mathbb{R}^*$

h) $2x = \frac{25}{2x};\ x \in \mathbb{R}^*$

i) $\frac{3y+6}{y+1} = y + 2;\ y \in \mathbb{R} - \{-1\}$

j) $t - 9 = \frac{72}{t-8};\ t \in \mathbb{R} - \{8\}$

k) $\frac{x^2 + 4}{5} = 2 - x$

l) $\frac{x+1}{x-4} = x + 7;\ x \in \mathbb{R} - \{4\}$

m) $x^2 - 5x + 3 = 0$

n) $\frac{4}{5} - \frac{2}{x-2} = \frac{2}{3x};\ x \in \mathbb{R}^* - \{2\}$

o) $\frac{x}{x+1} + \frac{3}{x-2} = \frac{1}{2};\ x \in \mathbb{R} - \{-1,\ 2\}$

p) $\frac{x^2}{3} - \frac{3-x^2}{6} = \frac{1}{2}$

q) $\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1-x^2}{5x}$; $x \in \mathbb{R}^*$

r) $t+3=\dfrac{10}{t+2}$; $t \in \mathbb{R}-\{-2\}$

s) $\dfrac{x}{x-2}+\dfrac{x}{x-8}=1$; $x \in \mathbb{R}-\{2,8\}$

2. Resolva os seguintes sistemas de equações do 2º grau, em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

a) $\begin{cases} x-2(y-1)=0 \\ x(x+y)=8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{x}{x-y}=2 \\ x+y^2=8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{7}{12} \\ xy=12 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+y=9 \\ x^2+y^2-2x-2y=23 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \dfrac{x+3}{2}+\dfrac{y+5}{3}=3 \\ xy=-15 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 0{,}25x+2y=2{,}80 \\ xy=3{,}92 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x+5y=-6 \\ \dfrac{x}{y}+2x=15 \end{cases}$

h) $\begin{cases} y=3-x \\ (x-y)^2+x(2y-1)=4 \end{cases}$

i) $\begin{cases} xy = 6 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{6} \end{cases}$

j) $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 3xy + y^2 = 63 \end{cases}$

3. Um quarto do quadrado de minha idade somado ao dobro dela dá 63 anos a mais que minha idade atual. Qual minha idade?

4. Retirando do quadrado da idade de uma pessoa o triplo dessa idade, temos como resultado 30 vezes a idade dessa pessoa. Quantos anos tem essa pessoa?

5. Uma mãe tinha 35 anos quando sua filha nasceu. Se multiplicarmos as idades que possuem hoje, o produto será igual a 3 vezes o quadrado da idade da filha mais uma vez sua própria idade (da filha). Quais são suas idades?

6. Um grupo de amigos quis fazer um churrasco. Um deles foi ao supermercado comprar os produtos necessários, gastando no total R$ 96,80. Com base nesse valor, ele calculou o quanto cada um deveria dar, porém, no dia do churrasco, três amigos não compareceram. Com isso, coube a cada um dos presentes R$ 3,30 a mais na quantia antecipadamente calculada. Quantos eram os amigos desse grupo? Quantos estiveram presentes no churrasco? Quanto cada um dos presentes pagou?

7. Um tapete retangular tem no comprimento 80 cm a mais que na largura. A área ocupada pelo tapete é de 46.800 cm^2. Calcule o comprimento e a largura desse tapete.

8. Num acampamento de férias, havia 32 crianças, entre meninos e meninas. Calcule quantas meninas e quantos meninos estavam presentes, sabendo que o produto das quantidades dos dois grupos é igual a 252 e que a quantidade de meninas é maior do que a quantidade de meninos.

9. O número de pacotes de bolachas contidos em uma caixa é o triplo do número de bolachas de cada pacote. Sabendo que a caixa contém 675 bolachas, calcule o número de pacotes que contém a caixa.

10. Um grupo de estudantes organizou uma excursão para a praia. As despesas totais ficaram antecipadamente calculadas em R$ 42.000,00. Para aliviar as despesas, eles incluíram mais 5 estudantes nessa excursão. Como ninguém faltou ao compromisso, cada um dos participantes pagou R$ 150,00 a menos. Quantos estudantes participaram dessa excursão e quanto cada um gastou?

11. Com uma certa velocidade média, uma moto percorreu 180 quilômetros em x horas. Se tivesse aumentado sua velocidade média em 30 km/h, teria feito o mesmo percurso em 1 hora a menos. Pergunta-se:

    a) em quantas horas a moto fez o percurso de 180 km?

    b) qual foi a velocidade média?

    c) qual seria sua velocidade média para fazer o percurso em 1 hora a menos?

12. [1]Um comerciante árabe comprou um certo número de objetos de prata por 480 moedas. Porém, 4 desses objetos foram roubados e outros 6 estavam com defeito. Para não ter prejuízo, o comerciante foi obrigado a vender os objetos restantes com lucro de 4 moedas em cada um. Se não ganhou nem perdeu nessa operação, quantos eram os objetos de prata?

13. [2]Um grupo de abelhas, cujo número era a raiz quadrada da metade de todo o enxame, pousou sobre um jardim, tendo deixado pra trás $\frac{8}{9}$ do enxame; apenas uma abelha voava ao redor de um loto, atraída pelo zumbido de uma de suas amigas que caíra imprudentemente na armadilha da florzinha de doce fragrância. Quantas abelhas formavam o enxame?

---

[1] *Contando a História da Matemática – história da equação do 2º grau de Oscar Guelli, pág 50.*
[2] *Contando a História da Matemática – história da equação do 2º grau de Oscar Guelli, pág 44.*

5 Conjuntos

Intuitivamente, conjunto é uma lista, coleção ou classe de objetos, números, pessoas, etc.

Elemento – é um dos componentes de um conjunto.

- Márcia da Silva é um elemento do conjunto dos brasileiros.
- π é um elemento do conjunto dos números irracionais.

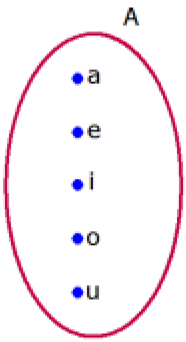
Relação de Pertinência – quando um dado elemento pertence ao conjunto, indicamos pelo símbolo $\in$, caso desejarmos expressar relação contrária, utiliza-se o símbolo $\notin$.

- Márcia da Silva pertence ($\in$) ao conjunto dos brasileiros.
- $-\dfrac{65}{3} \notin \mathbb{Z}$.

Representação de um Conjunto

- os conjuntos podem ser representados por letras maiúsculas do nosso alfabeto e seus elementos por letras minúsculas e dentro de chaves.
Exemplo: $A=\{a, e, i, o, u\}$.
- os conjuntos também podem ser representados por uma propriedade comum a todos seus elementos.
Exemplo: $A=\{vogais\}$.

- uma outra forma de representar um conjunto é através do diagrama de Venn:



Conjunto Unitário – conjunto que possui apenas um elemento.

- $A=\{x \in \mathbb{Z} \ / -2< x < 0\} = \{-1\}$

Conjunto Vazio – todo conjunto que não possui elementos.

- $A=\{x \in \mathbb{N} \ / -2< x < 0\} = \{\ \}$

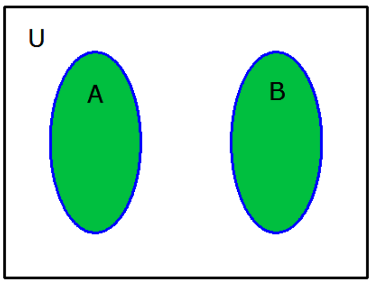
Conjuntos Numéricos – já estudados no capítulo 1.

Subconjunto – dados dois conjuntos **A** e **B**, o conjunto **A** está contido ($\subset$) no conjunto **B**, ou **A** é subconjunto de **B**, se todos os elementos do conjunto **A** pertencem também ao conjunto **B**.

- o conjunto dos números naturais é subconjunto dos números reais, ou, simbolicamente, tem–se $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$.

Igualdade de Conjuntos – dois ou mais conjuntos são ditos iguais se, e somente se, todos seus elementos forem iguais. Notação: $A = B$.

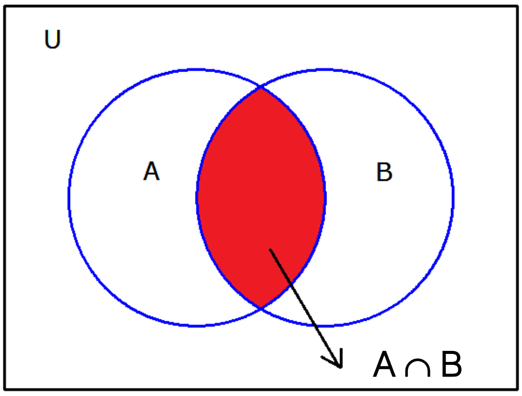
Conjunto Universo – é o conjunto formado por todos os elementos com os quais estamos trabalhando num determinado contexto. Esse conjunto é representado pela letra **U**.



OPERAÇÕES COM CONJUNTOS

• **Intersecção** – Chama-se de $A \cap B$ o conjunto formado por todos os elementos comuns a **A** e a **B.**

Se $A=\{0,1,2,3\}$ e $B=\{-2,-1,0,2,4,5\}$, então $A \cap B = \{0,2\}$.



• **União** - Chama-se de $A \cup B$ o conjunto formado por todos os elementos que pertencem ao conjunto **A** ou ao conjunto **B.**

Se $A=\{0,1,2,3\}$ e $B=\{-2,-1,0,2,4,5\}$, então
$A \cup B=\{-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$.

• **Diferença** - Chama-se $A - B$ o conjunto formado pelos elementos que pertencem a **A** e não pertencem a **B**.

$A=\{0,1,2,3\}$ e $B=\{-2,-1,0,2,4,5\}$, então $A - B = \{1,3\}$.

• **Complementar** – Se $A=\{0,1,2,3\}$ e $B=\{-2,-1,0,2,4,5\}$, dizemos que o complementar de **B** em relação a **A** é {1, 3}. Chama-se de complementar de **B** em relação a **A** todos os elementos que estão no conjunto **A** e não fazem parte do conjunto **B.** O complementar de um conjunto é representado pela notação $\subset_A^B$ ou B^c ou $\overline{A}$.

• **Número de Elementos da União de Conjuntos** – Sendo n_A o número de elementos de **A** e n_B o número de elementos de **B**, pode-se dizer: $n_{A \cup B} = n_A + n_B - n_{A \cap B}$.

INTERVALOS

Chamamos de intervalo determinados subconjuntos dos números reais. Assim, dados dois números reais a e b, com $a < b$, temos:

- Intervalo aberto: $]a,b[=(a,b)=\{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$
  ou na reta real:

- Intervalo fechado: $[a,b]=\{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$
  ou na reta real:

- Intervalo semiaberto à esquerda: $]a,b]=(a,b]=\{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$
  ou na reta real:

- Intervalo semiaberto à direita: $[a,b[=[a,b)=\{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$
  ou na reta real:

- Intervalos infinitos:

$\{x \in \mathbb{R} / x > a\} =]a, \infty[=(a, \infty)$

$\{x \in \mathbb{R} / x \geq a\} = [a, \infty[=[a, \infty)$

$\{x \in \mathbb{R} / x < a\} =]-\infty, a[=(-\infty, a)$

$\{x \in \mathbb{R} / x \leq a\} =]-\infty, a]=(-\infty, a]$

$]-\infty, +\infty[= (-\infty, \infty) = \mathbb{R}.$

Exemplo 5.1

Dados os conjuntos: $A=(-\infty,5]$, $B=(0,10]$, $C=(-2,0)$ e $D=[2,\infty)$, determine:

a) $A \cup B =$

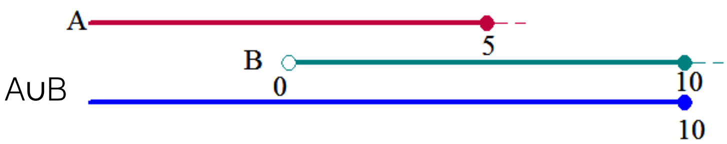
b) $C \cap D =$

c) $(A-B) \cap C =$

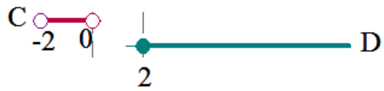
d) $C_D^B = D - B =$

Resolução

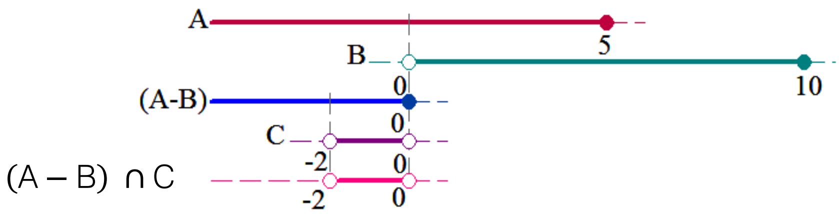
a) $A \cup B = (-\infty,10]$



b) $C \cap D = \{\ \}$



c) $(A-B) \cap C = (-2,0)$



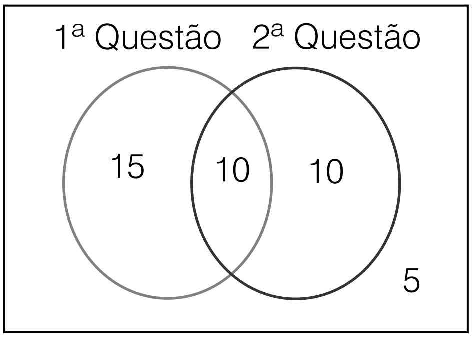
d) $C_D^B = D - B = (10,\infty)$

Exemplo 5.2

Um concurso público, realizado por 40 candidatos, apresentou apenas 2 questões dissertativas. Destas, 10 candidatos acertaram as 2 questões, 25 candidatos acertaram a 1ª questão e 20 candidatos acertaram a 2ª questão. Determine o número de candidatos que erraram as duas questões.

Resolução

- Iniciamos o desenho do diagrama de Venn, fazendo constar a intersecção entre os conjuntos que representam a 1ª e a 2ª questões;
- Em seguida, preenchemos o número de candidatos que acertaram as duas questões (intersecção);
- Após, atribuímos o número de candidatos que acertaram a 1ª questão, não esquecendo de descontar os que também acertaram a 2ª questão $(25 - 10)$;
- Repetimos o processo para o número de candidatos que acertaram a 2ª questão $(20 - 10)$.
- Conhecendo o total de candidatos (40) e subtraindo a soma total dos candidatos, observada no diagrama de Venn (35), tem-se, como solução, 5.



Resposta: 5 candidatos erraram as duas questões.

Exercícios – Capítulo 5

1. Sejam os conjuntos: $A = (-2,15]$, $B = [-11,10]$ e $C = \{0,4\}$, determine:

a) $A \cup B =$ ________________

b) $B \cap C =$ ________________

c) $A \cap (B \cup C) =$ ____________

d) $A - B =$ ________________

e) $A - (B \cup C) =$ ____________

2. Associe **V** ou **F** a cada uma das seguintes afirmações:

( ) $2 \in [2,6]$

( ) $-1 \in \{x \in \mathbb{R} \,/\, -1 < x < 1\}$

( ) Se $A = [2, 6)$, $B = (-\infty, 0]$ e $C = \{x \in \mathbb{R} \,/\, -1 < x < 9\}$, então $(A \cup B) \cap C = [-1, 9)$

( ) Se $A = [-3, 6]$, $B = \{x \in \mathbb{R} \,/\, -5 < x < 0\}$ e $C = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x < 4\}$, então $(A \cap B) \cup C = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x < 0\}$.

( ) $3 \notin \{x \in \mathbb{R} \,/\, 3 < x < 4\}$

( ) $(9, 15] =]9,15] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 9 < x \leq 15\}$

( ) Se $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$

( ) Se $A \cup B = B \Rightarrow A \subset B$

( ) Se $A \cap B = B$ e $A \cap C = A \Rightarrow B \subset A \subset C$

3. Dados $U = \{0,1,2,3,5,6,8,9\}$, $A = \{0,2,4,6\}$, $B = \{1,3,5,7\}$ e $C = \{0,1,2,6\}$, determinar:

a) C_U^A

b) C_U^B

c) C_U^C

d) C_B^A

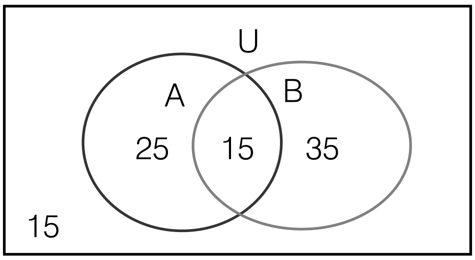
4. Considerando o diagrama abaixo, determine:

a) $n(A \cap B)$

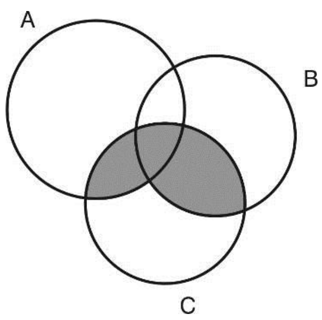
b) $n(A \cup B)$

c) $n(A - B)$

d) $n(U)$



5. Indique simbolicamente a parte hachurada no digrama.



6. Dados os conjuntos $A = \{0,1,2,3\}$ e $B = \{2,3,4\}$, determine os conjuntos X e Y, tal que: $X = A \cap B$ e $Y = A \cup B$.

7. Em uma pesquisa feita com 250 casais sobre turismo nos últimos cinco anos, constatou-se o seguinte: 70 casais tinham viajado para Gramado, 180 casais tinham viajado para a praia de Torres e 40 casais não tinham viajado nem para Gramado, nem para Torres. Analisando esses dados, responda quantos casais fizeram as duas viagens (Gramado e Torres).

8. Uma pesquisa realizada pela *“Revista Nossa Gente”* reuniu uma amostra de 175 jovens para verificar suas preferências entre os filmes brasileiros: *Carandiru e Durval Discos*. Dentre os entrevistados que assistiram aos filmes, 90 deles preferem o filme *Carandiru,* 70, *Durval Discos* e 25 gostaram dos dois filmes. Qual o número de pessoas entrevistadas que não assistiram a nenhum dos filmes mencionados?

9. Em um estudo sobre os grupos sanguíneos ABO, 1240 pessoas foram testadas: 456 tinham o antígeno A, 478, o antígeno B e 496, nenhum antígeno (O). Quantos indivíduos tinham ambos os antígenos?

10. Uma empresa que possui **n** funcionários recebe dois tipos de jornais diariamente. Desses funcionários, 43 lêem o jornal **A**, 21 lêem os jornais **A** e **B**, 70 lêem apenas um dos jornais e 61 não lêem o jornal **B**. Determine **n**.

11. **E**, **F** e **G** são conjuntos tais que $n(E \cap F) = 8$, $n(G) = 10$, $n(E - G) = 7$, $n(E \cap F \cap G) = 5$, $n(F \cap G) = 6$, $n(F) = 12$, $n(E \cap G) = 7$. Determine o número de elementos de:

a) E

b) F – G

c) E ∪ F

d) E ∪ F ∪ G

12. Uma agência de turismo estuda a possibilidade de lançar três pacotes turísticos para a terceira idade.
Pacote 1: Alemanha e Itália.
Pacote 2: Japão.
Pacote 3: Portugal e Espanha.

Para isso, foi realizada uma pesquisa de mercado e concluiu-se que, em cada 1.000 pessoas consultadas,

☺ 600 optaram pelo pacote 3.
☺ 400 optaram pelo pacote 1.
☺ 300 optaram pelo pacote 2.
☺ 200 optaram pelos pacotes 1 e 3.
☺ 150 optaram pelos pacotes 2 e 3.
☺ 100 optaram pelos pacotes 1 e 2.
☺ 20 optaram pelos três pacotes.

Determine:

a) o número de pessoas que optaram por apenas um dos três pacotes;

b) o número de pessoas que rejeitaram os três pacotes;

c) o número de pessoas que optaram por dois ou mais pacotes;

d) o número de pessoas que optaram apenas pelos pacotes 1 e 2.

13. Foram entrevistados 200 estudantes dos cursos do Instituto de Ciências Sociais e Aplicadas da Universidade XX para verificar a escolha da matrícula para o próximo semestre. As disciplinas verificadas foram: Matemática, Português e Sociologia. Constatou-se que: 10 alunos optaram pelas três disciplinas; 13 optaram somente por Matemática e Português; 25 optaram somente por Português e Sociologia; 18 optaram somente por Matemática e Sociologia; 46 optaram somente por Português; 47 optaram por Matemática e todos optaram por, pelo menos, uma dessas disciplinas.

a) Quantos alunos optaram por somente uma das três disciplinas?

b) Quantos alunos optaram somente por Matemática?

c) Quantos alunos optaram por Matemática ou Sociologia?

d) Quantos alunos optaram por Português?

e) Quantos alunos optaram por Matemática ou Sociologia ou Português?

14. Numa prova de Física, constavam três questões. A primeira era sobre o movimento retilíneo uniforme. A segunda, sobre movimento retilíneo uniformemente variado e a terceira, sobre queda livre. Sabe-se que, dos 29 alunos que realizaram a prova, precisamente 15 alunos acertaram a 1ª questão; 7 alunos acertaram somente a 2ª questão; 1 aluno acertou somente a 3ª questão; 11 alunos acertaram a 2ª e a 3ª questão; nenhum aluno errou todas as questões. Quantos alunos acertaram as três questões?

15. Em uma pesquisa feita com 80 pessoas sobre o uso de "óculos de grau" e "óculos de sol", constatou-se o seguinte: 35 pessoas usam "óculos de sol", 17 pessoas usam os dois tipos de óculos e 18 pessoas não usam óculos de qualquer tipo.

a) Quantas das pessoas entrevistadas usam somente óculos de grau?

b) Quantas das pessoas entrevistadas usam, pelo menos, um tipo de óculos?

c) Quantas das pessoas entrevistadas usam somente um tipo de óculos?

16. Em uma pesquisa feita com 800 pessoas sobre a preferência em ter conta bancária no Banco A ou no Banco B, constatou-se o seguinte: 480 pessoas têm conta no Banco A, 340 pessoas têm conta no Banco B e 230 pessoas não possuem conta em nenhum dos dois bancos. Analisando esses dados, quantas dessas pessoas possuem conta nos dois bancos?

17. Feita uma pesquisa sobre preferências musicais, constatou-se que 250 pessoas gostam de Música Popular Brasileira (MPB); 60 pessoas gostam de Música Clássica, 180 pessoas preferem outros tipos de música e 30 pessoas gostam de MPB e música clássica. Determine:

a) quantas pessoas foram consultadas;

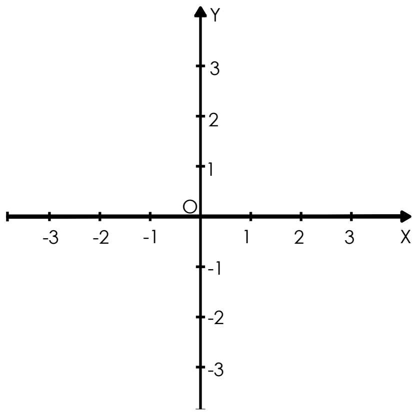
b) quantas dessas pessoas gostam apenas de música clássica.

6

Funções

PLANO CARTESIANO

É dito plano cartesiano a união de uma reta horizontal com uma reta vertical (perpendiculares entre si), sendo o eixo (ou reta) horizontal denominado eixo das abscissas e o eixo (ou reta) vertical denominado eixo das ordenadas.



Utiliza-se o plano cartesiano para representar um ponto, sendo este composto por um par ordenado (a,b), em que **a** pertence ao eixo das abscissas, **b** pertence ao eixo ordenado e a origem do sistema é o ponto O(0,0).

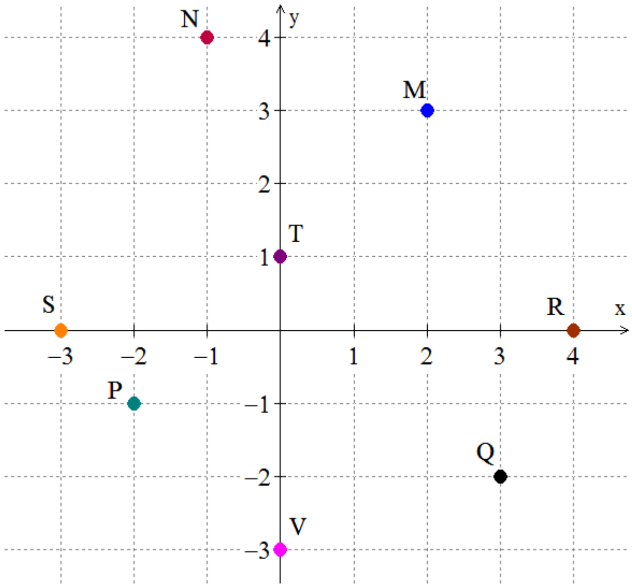
Exemplo 6.1

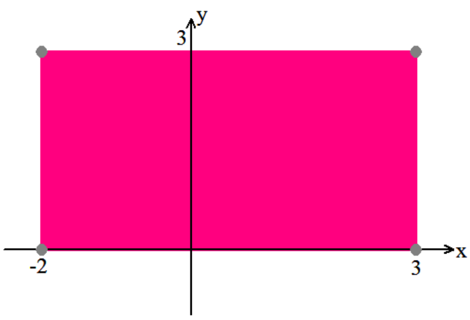
a) Representar os pontos: M(2,3), N(–1,4), P(–2,–1), Q(3,–2), R(4,0), S(–3,0), T(0,1) e V(0,–3) em um plano cartesiano.

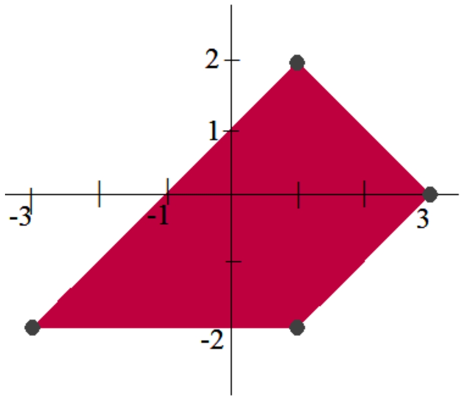
b) Qual a área (cm^2) da figura formada pelos seguintes pontos?
A(–2,0); B(-2,3); C(3,3); D(3,0)
A(–3,–2); B(1,2); C(3,0); D(1,–2)

Resolução

A primeira figura representa os pontos M, N, P, Q, R, S, T e V no plano cartesiano; e a segunda e terceira figuras representam os planos propostos no exemplo *b*.







A segunda figura representa um retângulo que apresenta 5 cm de base e 3 cm de altura $\left(A_{\text{retângulo}} = \text{base} \cdot \text{altura}\right)$, totalizando $A = 5 \cdot 3 = 15\ \text{cm}^2$.

A terceira figura representa um quadrilátero que pode ser divido em dois triângulos: $(1,\text{-}2)$, $(3,0)$, $(1,2)$ e $(\text{-}3,\text{-}2)$, $(1,\text{-}2)$, $(1,2)$. Utilizando a fórmula da área de um triângulo, obtém-se: $A_1 = \dfrac{4 \cdot 2}{2} = 4$ e $A_2 = \dfrac{4 \cdot 4}{2} = 8$, tem-se $A_{\text{total}} = 4 + 8 = 12\ \text{cm}^2$.

FUNÇÃO

Dados dois conjuntos não-vazios **A** e **B**, uma função de **A** em **B** (cuja notação é $f:A \to B$ ou $A \xrightarrow{f} B$) é uma regra que diz como associar cada elemento de $x \in$ **A** a um único elemento $y \in$ **B**.

O conjunto *A* é denominado *domínio* da função e representado por D(f), e o conjunto *B*, *contradomínio* da função CD(f). O conjunto formado pelos correspondentes de *x*, no conjunto *B,* é denominado conjunto *imagem* e representado por Im(f). Os elementos do domínio e da imagem são referidos como os valores de entrada e saída, respectivamente.

Exemplo 6.2

Para encher uma piscina plástica com capacidade máxima de 5.000 litros, usa-se uma torneira com vazão de 20 ℓ de água por minuto. A relação entre o volume d'água e o tempo que a torneira ficará aberta pode ser descrita por:

Após 1 minuto, será de 20 ℓ.
Após 2 minutos, será de 2×20 ℓ = 40 ℓ.
Após 50 minutos, será de 50×20 ℓ = 1000 ℓ.
Após 100 minutos, será de 100×20 ℓ = 2000 ℓ.
...
Após 250 minutos, será de 250×20 ℓ = 5000 ℓ.

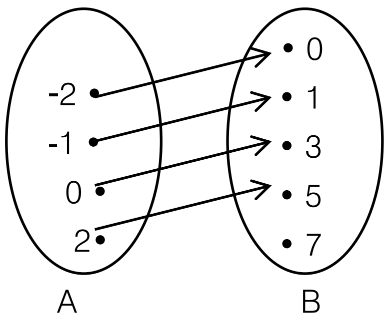
Indicando o tempo por x e o volume por y, temos $y = 20x$. A **cada** valor de x há um **único** valor para y. Dizemos que "*y* é função de x". Também podemos escrever $v = 20t$, onde v representa volume e t representa o tempo.

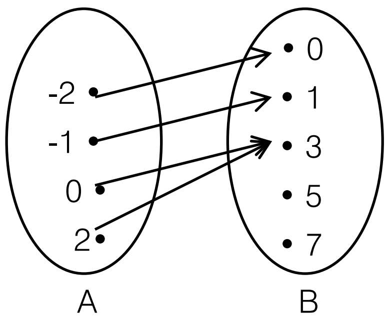
Exemplo 6.3

O valor a ser pago de energia elétrica no final do mês está diretamente relacionado com a quantidade de energia (watts) consumida, relacionando duas variáveis. A energia, variável independente e o valor a ser pago, variável dependente.

Exemplo 6.4

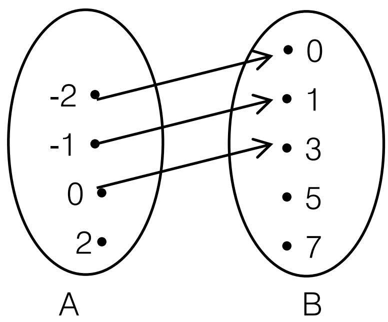
Outra maneira de denotar uma função é através do diagrama de Venn, como segue nos exemplos a seguir.

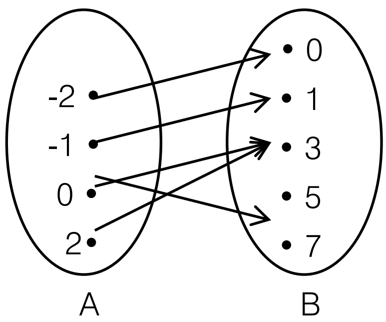




Os conjuntos descritos relacionam cada elemento do conjunto A a um único elemento do conjunto B. Assim, temos uma função de ***A*** em ***B,*** $(f: A \to B)$.

Caso a representação via diagrama de Venn se comporte como na relação a seguir, dizemos que não temos uma função de ***A*** em ***B***.





Observe que, na primeira relação, há um elemento do conjunto A que não possui nenhum correspondente no conjunto B, logo, essa relação não pode ser denominada função. Já na segunda relação, temos um mesmo elemento do conjunto A, que se relaciona com diferentes elementos do conjunto B, assim, fica estabelecida apenas uma relação de A em B.

FUNÇÕES DEFINIDAS POR FÓRMULAS MATEMÁTICAS

Uma fatia significativa das funções que estudamos é determinada por fórmulas matemáticas (regras ou leis).

Exemplo 6.5

Uma função $f: A \to B$ é denotada por $f(x) = -x + \frac{1}{x}$. Determine:

a) $f(3)$

Resolução

$$f(3) = -3 + \frac{1}{3} = \frac{-9+1}{3} = -\frac{8}{3}$$

b) $f\left(\frac{3}{2}\right)$

Resolução

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2} + \frac{1}{\frac{3}{2}} = -\frac{3}{2} + 1\frac{2}{3} = -\frac{3}{2} + \frac{2}{3} = \frac{-9+4}{6} = -\frac{5}{6}$$

c) $f(x+1)$, para $x \neq -1$

Resolução

$$f(x+1) = -(x+1) + \frac{1}{x+1} = \frac{-(x+1)\cdot(x+1)+1}{x+1} = \frac{-(x^2+2x+1)+1}{x+1} = \frac{-x^2-2x}{x+1}$$

Exemplo 6.6

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função que envolve mais de uma lei de formação:

$$f(x) = \begin{cases} 3x+1, & \text{para } x \leq 2 \\ x^2, & \text{para } x > 2 \end{cases}$$. Determine:

a) $f(2)$

Resolução

Como $x \leq 2$, utilizamos a primeira sentença:

$f(2) = 3\cdot(2) + 1 = 7$

b) $f(10)$

Resolução

Como $x > 2$, utilizamos a segunda sentença:

$f(10) = (10)^2 = 100$

Exemplo 6.7

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que:

$$f(x) = x^2 + bx + c \ (b \text{ e } c \in \mathbb{R});$$

$$f(1) = 3$$

$$f(-1) = 18$$

Determine $f(2)$.

Resolução

$$f(1) = 3 \ \Rightarrow \ 1^2 + b \cdot 1 + c = 3 \qquad \Rightarrow \ b + c = 2$$

$$f(-1) = 18 \ \Rightarrow \ (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = 18 \ \Rightarrow -b + c = 17$$

$$\begin{cases} b + c = 2 \\ -b + c = 17 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, encontra-se como solução: $b = -\dfrac{15}{2}$ e $c = \dfrac{19}{2}$.

$$f(x) = x^2 - \frac{15}{2}x + \frac{19}{2} \qquad \Rightarrow \ f(2) = (2)^2 - \frac{15}{2} \cdot 2 + \frac{19}{2} = 4 - 15 + \frac{19}{2} = -\frac{3}{2}.$$

ESTUDO DO DOMÍNIO DE UMA FUNÇÃO REAL

Se uma função é definida por uma lei de formação e o domínio não é explícito, então, considera-se que o domínio é o conjunto de todos os números reais para os quais a expressão é definida.

Exemplo 6.8

Encontre o domínio para:

a) $h(x) = x^2 - 25$

Resolução

A expressão $x^2 - 25$ é definida para todos os números reais. Portanto, $D(h) = \mathbb{R}$.

b) $g(x) = \dfrac{x-5}{x+3}$

Resolução

A expressão $\dfrac{x-5}{x+3}$ é definida para todos os números reais, exceto $x=-3$ (não existe divisão por zero). Portanto, $D(g)=\mathbb{R}-\{-3\}$.

c) $f(x)=\dfrac{x-5}{\sqrt{x+3}}$

Resolução

A expressão $\dfrac{x-5}{\sqrt{x+3}}$ é definida quando $x+3>0$, ou seja, $x>-3$.
Portanto, $D(f)=(-3,\infty)$.

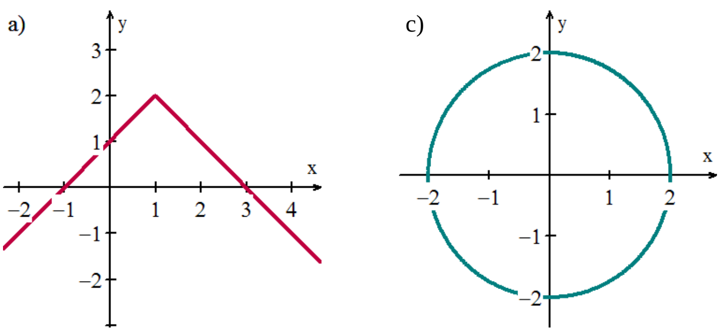
GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO REAL

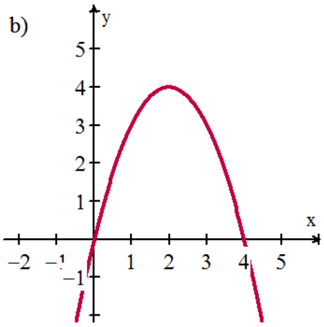
O gráfico de uma função *f* é o conjunto de todos os pontos (x,y), tal que *x* está no domínio de *f* e $y=f(x)$.

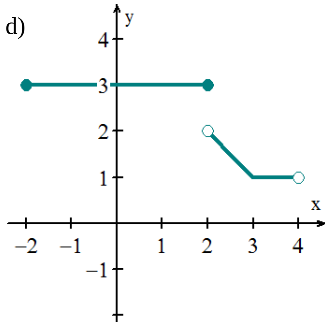
Para verificar se um gráfico representa uma função, podemos utilizar o **Teste da Linha Vertical**, ou seja, para cada valor de *x* no domínio de *f* há exatamente um valor de *y* tal que $y=f(x)$. Assim, uma linha vertical $x=c$ pode cruzar o gráfico de uma função no máximo uma vez, desse modo, se a linha vertical cruza o gráfico mais de uma vez, este não representa uma função.

Exemplo 6.9

Determine se cada um dos gráficos abaixo representa uma função. Em caso afirmativo, determine o conjunto domínio e o conjunto imagem.







Resolução

Os gráficos das figuras a), b) e d) representam função, pois qualquer reta perpendicular ao eixo **x** intercepta a figura em um único ponto. Entretanto, o gráfico da figura c) *não* é uma função, pois existem retas perpendiculares ao eixo **x** interceptando a figura em mais de um ponto.

Para a figura a), temos $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = (-\infty, 2]$.

Para a figura b), temos $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = (-\infty; 4]$.

Para a figura d), o $D(f) = [-2, 4)$ e a $Im(f) = [1, 2) \cup \{3\}$.

FUNÇÃO CRESCENTE, DECRESCENTE E CONSTANTE

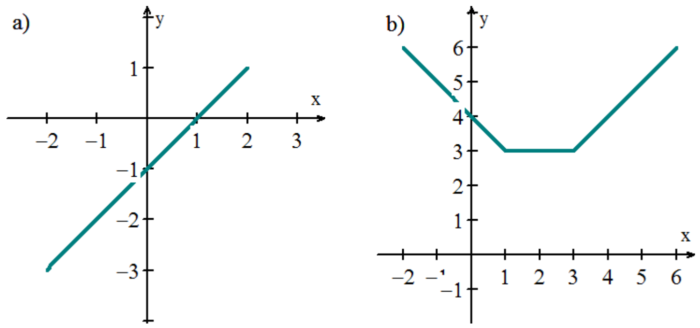
Para todo x em um intervalo (a,b), à medida que x cresce, se $f(x)$ diminui, ou seja, se o gráfico de uma função cai da esquerda para a direita, f é chamada de função *decrescente* no intervalo. Algebricamente f é decrescente em (a,b), se para quaisquer x_1 e x_2 em (a,b), e $x_1 < x_2$, temos $f(x_1) > f(x_2)$.

De forma análoga, se para todo x em um intervalo (a,b), à medida que x cresce e $f(x)$ aumenta, ou seja, o gráfico de uma função sobe da esquerda para a direita, f é chamada de função *crescente* no intervalo. Algebricamente f é crescente em (a,b), se para quaisquer x_1 e x_2 $\in (a,b)$, e $x_1 > x_2$, temos $f(x_1) > f(x_2)$.

Caso o valor de uma função não cresça, nem decresça em um dado intervalo, apresentando como gráfico um segmento de reta paralelo ao eixo horizontal, a função é denominada *função constante* no intervalo estudado. Algebricamente f é constante no intervalo, se para qualquer x_1 e x_2 em (a,b), $f(x_1) = f(x_2)$.

Exemplo 6.10

Os gráficos a seguir representam funções; indique os intervalos em que a função é crescente, decrescente ou constante.



Resolução

Na figura a) à medida que x aumenta, $f(x)$ também aumenta, logo a função é crescente.

Na figura b) temos 3 intervalos a considerar:

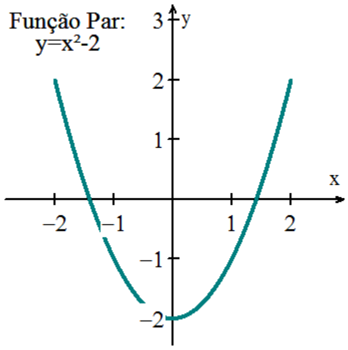
- $f(x)$ é decrescente: $(-\infty, 1)$;
- $f(x)$ é constante: $(1,3)$;
- $f(x)$ é crescente: $(3, \infty)$.

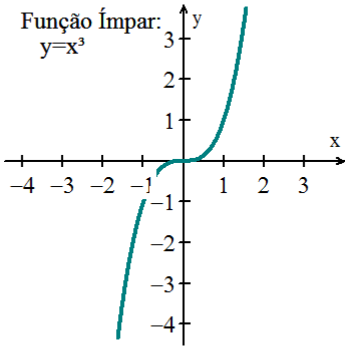
FUNÇÕES PARES E ÍMPARES

Função par é a função na qual $f(-x) = f(x)\ \forall x \in D(f)$. Nesse grupo de funções $f(x)$ apresenta imagem igual a $f(-x)$ e sua representação gráfica tem simetria em relação ao eixo Y.

Função ímpar é a função na qual $f(-x) = -f(x)\ \forall x \in D(f)$. Para essas funções, a simetria existe em relação à origem do sistema.

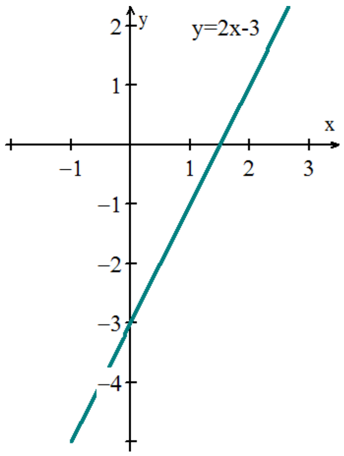
Entretanto, a grande maioria das funções não são nem pares nem ímpares.





Exemplo 6.11

Considere o gráfico da função $f(x) = 2x - 3$ e responda.



a) Qual o domínio da função?

b) Qual a imagem da função?

c) A função é crescente ou decrescente?

d) Qual o ponto em que a função intercepta os eixos coordenados?

e) A função é par, ímpar ou nem par nem ímpar?

Resolução

a) $D(f) = \mathbb{R}$

b) $Im(f) = \mathbb{R}$

c) A função é sempre crescente.

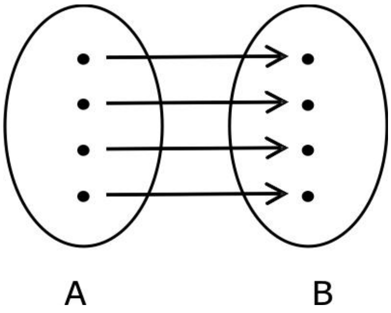
d) A função intercepta o eixo das abscissas no ponto $(1{,}5; 0)$ e o eixo das ordenadas no ponto $(0, -3)$.

e) A função não é nem par nem ímpar, pois se $x = 2$:

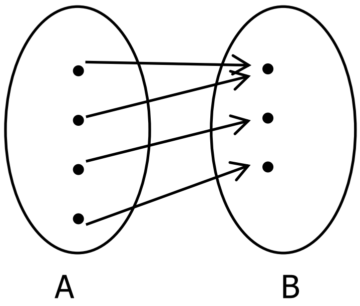
- $f(2) \neq f(-2)$, pois $f(2) = 1$ e $f(-2) = -7$.
- $f(-2) \neq -f(2)$, pois $f(-2) = -7$ e $-f(2) = -1$.

FUNÇÃO INJETORA, SOBREJETORA E BIJETORA

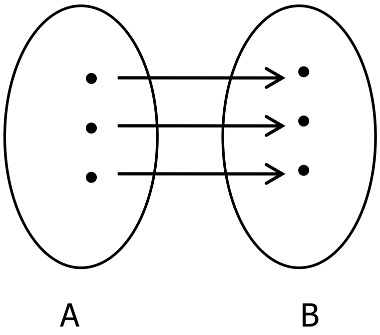
Uma função $f: A \to B$ é injetora quando elementos diferentes em *A* são transformados por *f* em elementos diferentes em *B*, ou seja, não há elemento em *B* com mais de um componente em *A*.



Uma função $f: A \to B$ é sobrejetora quando para qualquer elemento de *B* pode-se encontrar um elemento em A, ou seja, quando qualquer elemento de *B* é imagem de, pelo menos, um elemento de *A*, ou seja, $Im(f) = B$.



Uma função $f: A \to B$ é bijetora se ela for, simultaneamente, injetora e sobrejetora, como no exemplo a seguir:



Exemplo 6.12

Classifique as funções a seguir em: sobrejetoras (**S**), injetoras (**I**), bijetoras (**B**) ou nenhuma das altenativas(**N**).

a) (   ) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2^x$

b) (   ) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x$

c) (   ) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^3$

d) (   ) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = |x-2|$

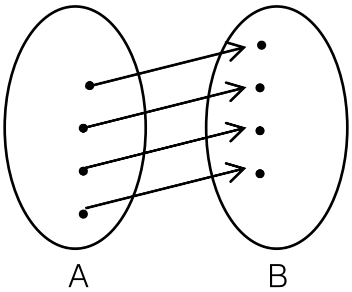
Resolução

(I)(B)(B)(N)

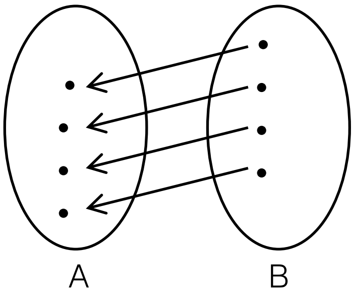
FUNÇÃO INVERSA

Dada uma função de $f: A \to B$, bijetora, denomina-se função inversa de f a função $g: B \to A$ tal que, se $f(a) = b$, então $g(b) = a$, com $a \in A$ e $b \in B$. A inversa de uma função f pode ser denotada por f^{-1}.

Assim,

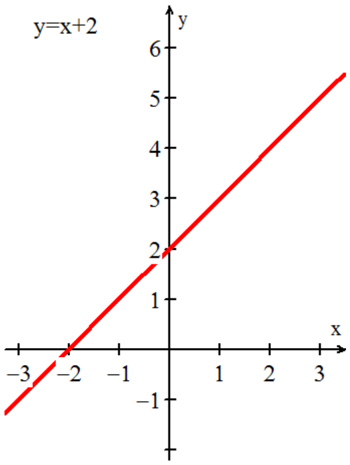


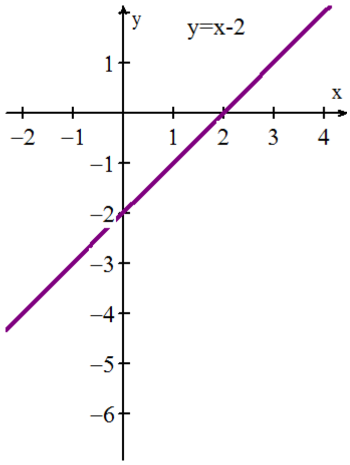
$f: A \to B$

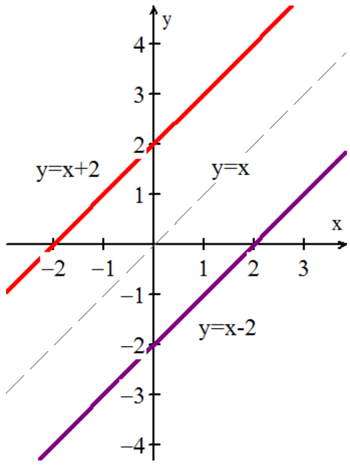


$f^{-1}: B \to A$

A seguir é representado o gráfico de uma função $y = x + 2$, e sua inversa $y = x - 2$.







<u>Observações:</u>

- $D(f^{-1}) = Im(f)$ e $Im(f^{-1}) = D(f)$.
- O ponto (x,y) está no gráfico de f se, e somente se, o ponto (y,x) estiver no gráfico de f^{-1}, isto é, há simetria entre os gráficos (representada pela reta $y = x$).
- A lei que define a função f^{-1} é a que expressa *x* em função de *y*, $x = f^{-1}(y)$.
- Como é usual representarmos por *x* a variável do domínio e por *y* a da imagem, quando achamos a lei da inversa, $x = f^{-1}(y)$, trocamos *x* por *y* e, *y* por *x*.

Exemplo 6.13

Para as funções a seguir, encontre sua inversa.

a) $y = \dfrac{x-2}{3}$

Resolução

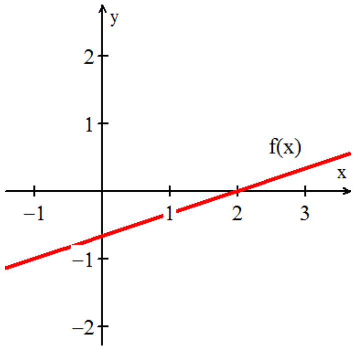
Na função $y = \dfrac{x-2}{3}$, devemos efetuar a troca da variável x por y e vice-versa.

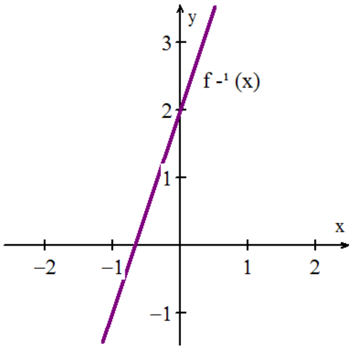
$$y = \frac{x-2}{3} \rightarrow x = \frac{y-2}{3}$$

Após, isolamos a variável y em função da variável x.

$$x = \frac{y-2}{3}$$
$$3x = y-2$$
$$3x+2 = y$$

Finalmente, a inversa da função: $f^{-1}(x) = 3x+2$.

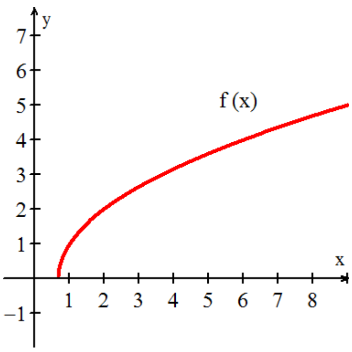




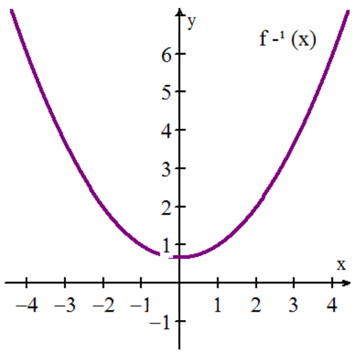
b) $y = \sqrt{3x-2}$

Resolução

$$y = \sqrt{3x-2}$$
$$x = \sqrt{3y-2}$$
$$(x)^2 = \left(\sqrt{3y-2}\right)^2$$
$$x^2 = 3y-2$$
$$y = \frac{x^2+2}{3}$$



Logo, $f^{-1}(x) = \dfrac{x^2+2}{3}$

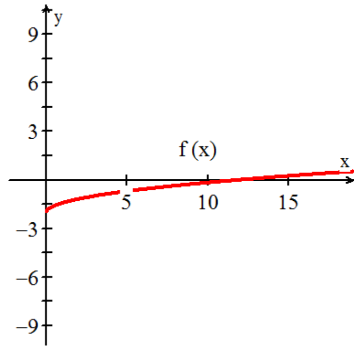


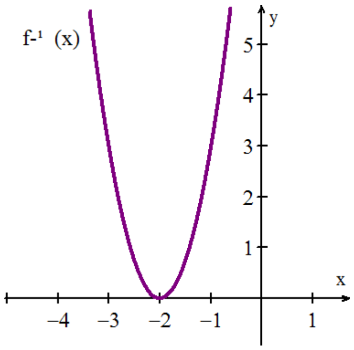
c) $y=\sqrt{\frac{x}{3}}-2$

Resolução

$$y=\sqrt{\frac{x}{3}}-2$$
$$x=\sqrt{\frac{y}{3}}-2$$
$$x+2=\sqrt{\frac{y}{3}}$$
$$(x+2)^2=\left(\sqrt{\frac{y}{3}}\right)^2$$
$$x^2+4x+4=\frac{y}{3}$$
$$3(x^2+4x+4)=y$$
$$3x^2+12x+12=y$$

Logo, $f^{-1}(x)=3x^2+12x+12$



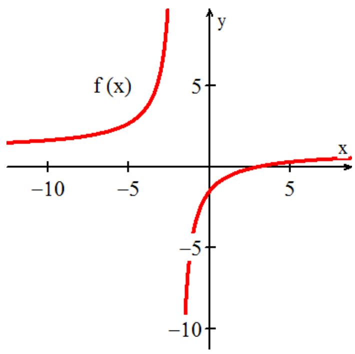


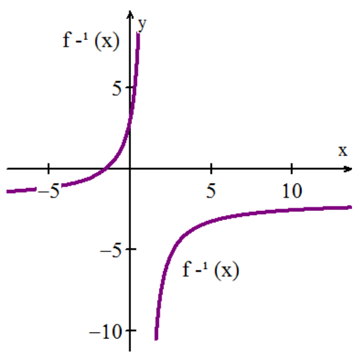
d) $y=\frac{x-3}{x+2}$

Resolução

$$(x+2)\cdot y=x-3$$
$$xy+2y=x-3$$
$$xy-x=-2y-3$$
$$(y-1)x=-2y-3$$
$$x=\frac{-2y-3}{(y-1)}$$
$$y=\frac{-2x-3}{(x-1)}$$

Logo, $f^{-1}(x)=\frac{-2x-3}{x-1}$





e) $y = \arctan 8x$

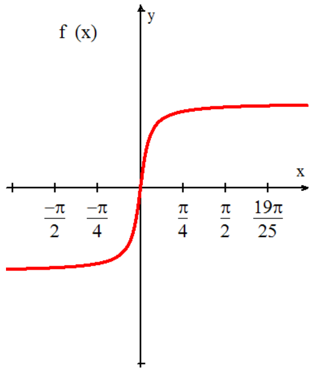
Resolução

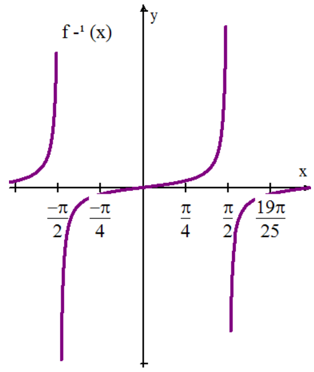
$$y = \arctan 8x$$
$$8x = \arctan y$$
$$x = \frac{\tan y}{8}$$
$$y = \frac{\tan x}{8}$$

ou

$$\tan y = 8x$$
$$\tan x = 8y$$
$$y = \frac{\tan x}{8}$$

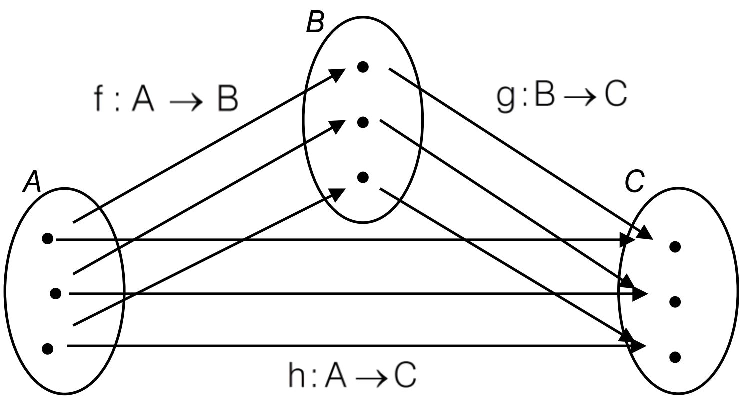
Logo, $f^{-1}(x) = \frac{\tan x}{8}$





FUNÇÃO COMPOSTA

Dados os conjuntos *A*, *B* e *C* e as funções $f: A \to B$ e $g: B \to C$, pode-se encontrar outra função $h: A \to C$, chamada de ***função composta*** de g e f, sendo que é possível associar cada elemento de ***A*** diretamente a ***C***, como vemos no esquema.



Genericamente, escrevemos $h(x) = g(f(x))$ ou $(g \circ f)(x)$, para todo $x \in A$, sendo que $h(x)$ representa a função ***g*** composta com ***f***.

Exemplo 6.14

Sejam as funções $f(x) = x^2 - 4x$ e $g(x) = x + 3$, encontre:

a) $(g \circ f)(x)$

b) $(f \circ g)(x)$

c) $f(f(x))$

d) $g(g(x))$

e) $(g \circ f)(-2)$

f) $f(f(\sqrt{2}))$

a) Resolução

Para encontrar $(g \circ f)(x)$, devemos substituir na função $g(x) = x + 3$, x por $f(x)$, ou seja, $g(f(x))$:

$$g(x) = x + 3$$
$$g(f(x)) = f(x) + 3$$

Usando a igualdade $f(x) = x^2 - 4x$, encontramos uma função composta totalmente em função da variável x:

$$g(f(x)) = f(x) + 3$$
$$g(f(x)) = (x^2 - 4x) + 3$$
$$g(f(x)) = x^2 - 4x + 3$$

Logo, $(g \circ f)(x) = x^2 - 4x + 3$.

b) Resolução

$$(f \circ g)(x)$$
$$(f \circ g)(x) = (x + 3)^2 - 4(x + 3)$$
$$(f \circ g)(x) = (x^2 + 6x + 9) - 4x - 12$$
$$(f \circ g)(x) = x^2 + 2x - 3$$

c) Resolução

$$f(f(x))$$
$$f(f(x)) = (x^2 - 4x)^2 - 4(x^2 - 4x)$$
$$f(f(x)) = (x^4 - 8x^3 + 16x^2) - 4x^2 + 16x$$
$$f(f(x)) = x^4 - 8x^3 + 12x^2 + 16x$$

d) Resolução

$$g(g(x))$$
$$g(x) = x + 3$$
$$g(g(x)) = (x + 3) + 3$$
$$g(g(x)) = x + 6$$

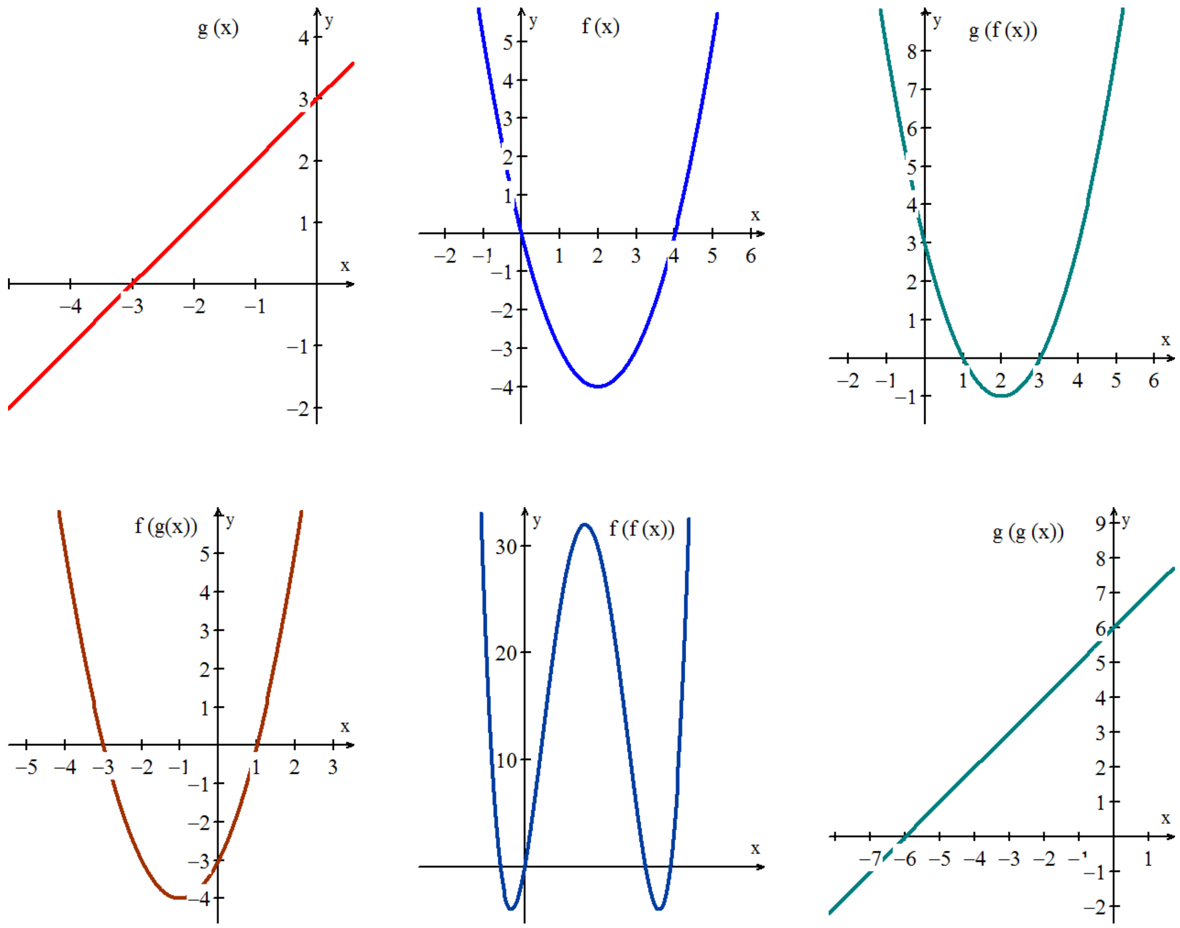
e) Resolução

$$(g \circ f)(-2)$$
$$(g \circ f)(x) = x^2 - 4x + 3$$
$$(g \circ f)(-2) = (-2)^2 - 4(-2) + 3$$
$$(g \circ f)(-2) = 4 + 8 + 3$$
$$(g \circ f)(-2) = 15$$

f) Resolução

$$f(f(\sqrt{2}))$$
$$f(f(x)) = x^4 - 8x^3 + 12x^2 + 16x$$
$$f(f(\sqrt{2})) = (\sqrt{2})^4 - 8(\sqrt{2})^3 + 12(\sqrt{2})^2 + 16(\sqrt{2})$$
$$f(f(\sqrt{2})) = 4 - 8(\sqrt{2})^3 + 12(2) + 16(\sqrt{2})$$
$$f(f(\sqrt{2})) = 28$$

Graficamente:



Exercícios – Capítulo 6

1. Dada a função $f(x) = x^2 - 3x + 2$, determine:

   a) f(5)

   b) f(–3)

   c) f(a)

   d) $f(a+b)$

2. Dado $h(x) = -2x^2 + 3x$, determine:

   a) h(2)

   b) $h\left(\frac{1}{3}\right)$

3. Seja a função $g(x) = \frac{2x-1}{x+2}$, determine:

   a) o valor de x para que $g(x) = -2$

   b) o valor de x para que $g(x) = -1$

   c) o valor de x para que $g(x) = 0$

   d) g(1)

   e) g(2)

4. Seja a função $f(x) = \sqrt{3x-9}$, determine:

   a) f(3).

   b) f(0).

   c) f(7,5).

   d) O domínio que corresponde à imagem 5.

   e) O domínio que corresponde à imagem –12.

   f) O domínio da função.

5. Seja a função $f(x) = x^2 + 5$, determine:

a) A imagem correspondente a x = 1.

b) O domínio que corresponde à imagem 18.

c) f(0).

d) $f\left(\frac{7}{5}\right)$.

e) O domínio da função.

6. O gráfico a seguir é de uma função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Classifique como V ou F cada uma das afirmações:

( ) f (– 3) = 1

( ) f(0) = 0

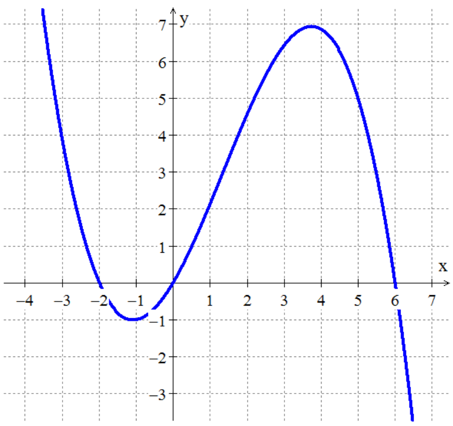
( ) f(4) = 3,75

( ) f(6) = 0

( ) $f\left(\frac{9}{2}\right) > 0$

( ) f(3) < 0

( ) f(5) – f(– 3) < – 1



7. Ainda referente ao gráfico do exercício anterior, é **CORRETO** afirmar que:

a) f(3) > f(4).

b) f(f(2)) > 1,5.

c) f(x) < 5,5 para todo x no intervalo [–3,6].

d) o conjunto $\{-3 \le x \le 6 / f(x) = 1{,}6\}$ contém exatamente dois elementos.

e) f(2) = 5.

8. Observe o gráfico da função *f* e classifique como **F** ou **V** cada uma das afirmações.

( ) O ponto (2,8) $\in$ f .

( ) Um dos zeros dessa função é o ponto (0,5; 0).

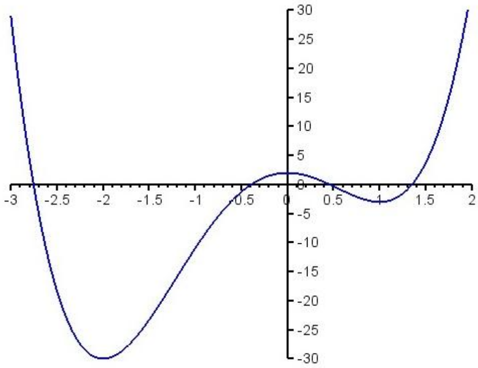
( ) Existe apenas um valor de x tal que f(x) = 4.

( ) Não existe nenhum ponto de *f* com ordenada negativa.

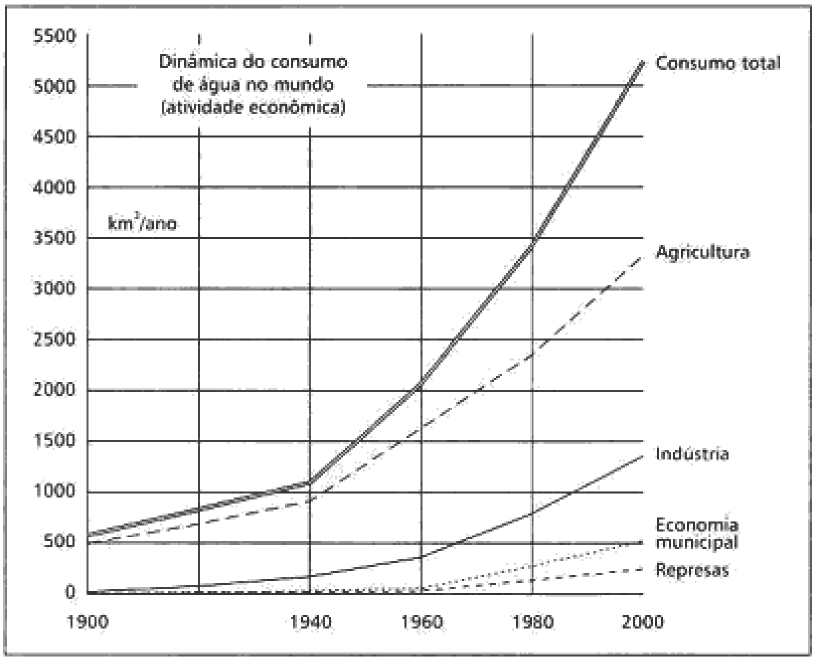
( ) Se $-3 < x < 0$, então $-30 < y < 30$.

( ) $f(3) > f(2)$.

( ) $f(3) \cdot f(2) > 0$.



9. (Feevale 2012/2) O gráfico a seguir descreveu tendências no consumo global de água, no período entre o ano de 1900 até 2000.



(Disponível em: <http://www.multiciencia.unicamp.br/art03.htm>. Acesso em: 04 abr.12)

Observando esse gráfico, podemos concluir que:

a) o consumo total de água aumentou aproximadamente 10 vezes nesse período.

b) o consumo total de água aumentou aproximadamente 100 vezes nesse período.

c) o consumo total de água só aumentou depois do ano de 1940.

d) a indústria consumiu mais água do que a agricultura.

e) do ano de 1980 para o ano 2000, o consumo total de água aumentou mais de 100%.

10. O número de usuários do Facebook no Brasil cresceu de 2008 a 2010, conforme segue.

Dezembro de 2008: 209 mil usuários.

Dezembro de 2009: 2,4 milhões.

Dezembro de 2010: 8,8 milhões.

De 2010 para 2011, houve um aumento de, aproximadamente, 298%.

(Dados adaptados de: <http://g1.globo.com/tecnologia/noticia/2012/01/numero-de-usuarios-brasileiros-no-facebook-cresce-298-em-2011.html>. Acesso em: 29 ago. 2012).

Analise os gráficos a seguir e marque a alternativa que descreve corretamente esse aumento.

b)

a)

d)

c)

11. Num retângulo de 15 cm por **x** cm, foi retirado de um de seus cantos um quadrado de lado 2 cm. Escreva uma expressão matemática que represente sua área.

12. Trinta gatos experimentais, numerados 1, 2, 3, ..., 30, foram testados quanto à reação a uma certa dose de vacina para melhorar seu pêlo. Associamos o número 1 com um gato, se ele reagir positivamente; de outra forma, ele será associado ao número zero. Essa associação é uma função, por quê? Determine o domínio e a imagem dessa função.

13. [3]Em qual dos seguintes casos é correto dizermos que os elementos – *x* são levados nos elementos – *y ou, equivalentemente*, que a associação de *y* com *x* é uma função?

a) x = velocidade de pulsação, y = temperatura do corpo de um determinado paciente, x e y sendo medidos várias vezes.

b) x = triângulo, y = área do triângulo.

c) x = frequência das ondas eletromagnéticas e y = cor espectral.

d) x = seção de uma rodovia, y = velocidade média de um automóvel numa determinada viagem.

14. [4]Um animal saltador, tal como um gato ou uma pulga, cai de tal forma que a velocidade vertical do seu centro de gravidade aumenta de 9,81 m/s em cada segundo. Qual é a equação da velocidade vertical, se for escolhido o tempo zero no momento em que a velocidade vertical for zero (no ponto máximo)? Qual é a equação da velocidade vertical para t=0s; t=0,1s e t=0,2s etc.?

15. Determine o domínio das funções a seguir.

a) $f(x) = x^3 + 3x + 2$

b) $y = \dfrac{3x+5}{2x-1}$

c) $y = \sqrt{2x-3}$

d) $y = \dfrac{3x}{\sqrt{x+5}}$

---

[3] *Introdução a matemática para biocientistas* de E. Batschelet, p. 78, exercício 3.4.3.

[4] Adaptado da obra *Introdução a matemática para biocientistas* de E. Batschelet, pág. 78, exercício 3.5.3.

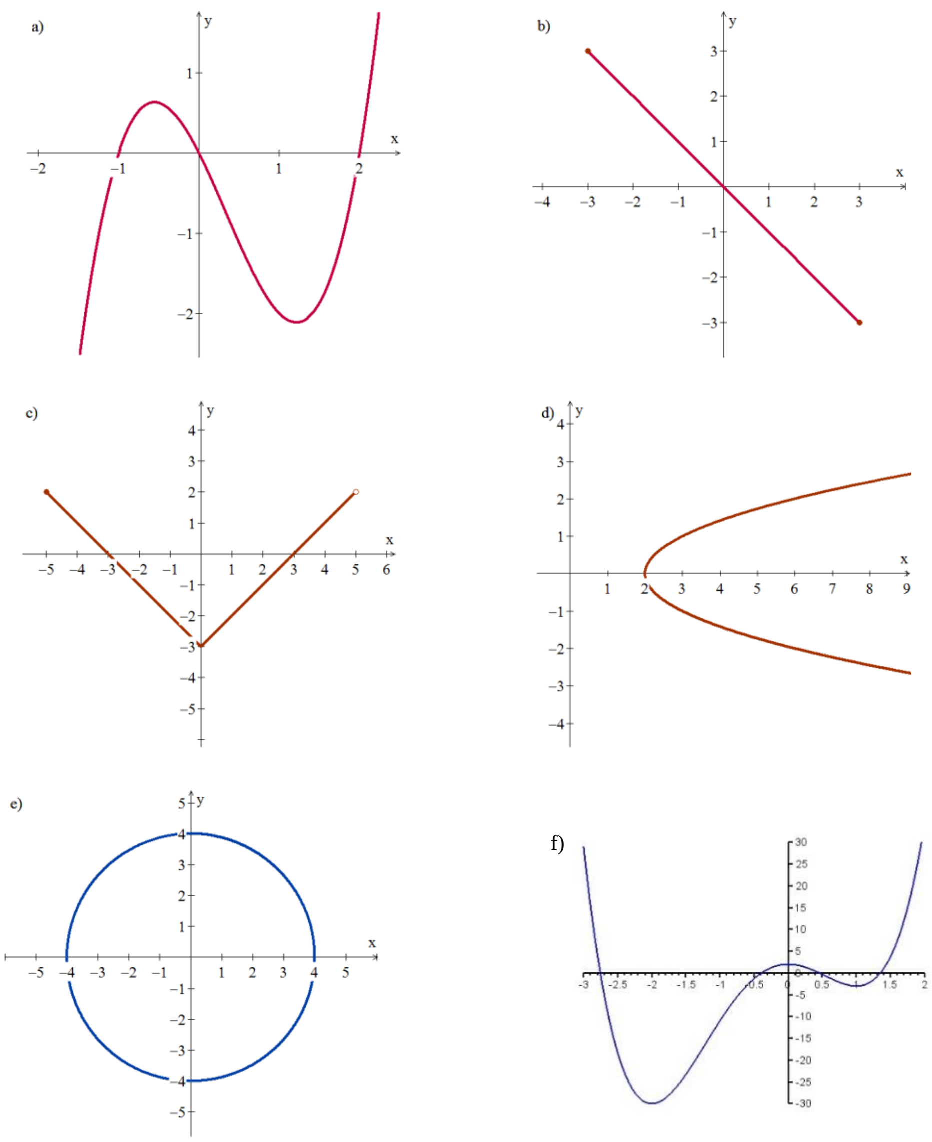
e) $f(x) = \dfrac{\sqrt{7-x}}{\sqrt{x-2}}$

f) $f(x) = \dfrac{2x}{x+1} - \dfrac{3}{x-5}$

g) $y = \dfrac{8}{\sqrt[3]{3x - \dfrac{1}{7}}}$

h) $y = \dfrac{5x^2+9}{x^2+16}$

16. Para os gráficos a seguir, determine o conjunto domínio e o conjunto imagem, caso seja função.



17. Classifique as funções em pares (**P**), ímpares (**I**) ou nem par nem ímpar (**N**).

a) (   ) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \dfrac{x+1}{2}$

b) (   ) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \dfrac{1}{x}$

c) (   ) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^4$

d) (   ) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = -x^2$

e) (   ) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x$

f) (   ) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2$

18. Verifique se as funções são sobrejetoras (**S**), injetoras (**I**), Bijetoras (**B**) ou nenhuma das altenativas (**N**).

a) (   ) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$

b) (   ) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x + 1$

c) (   ) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^4$

d) (   ) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x + 1$

e) (   ) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x - 1$

f) (   ) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 5$

19. Sendo $f(x) = x^2 + 3x$ e $g(x) = x - 2$, podemos dizer que:

a) $(f \circ g)(x) =$

b) $(f \circ f)(x) =$

c) $(f \circ g^{-1})(x) =$

d) $(g \circ f)(x) =$

e) $(f \circ g^{-1})(4) =$

f) $(g \circ f)(-2) =$

20. Sendo $h(x) = 2x - 25$ e $g(x) = x^3 - 5$, determine:

a) $h^{-1}(x)$

b) $g^{-1}(x)$

c) $h^{-1}(-1)$

d) $g^{-1}(7)$

e) $h(g(x))$

f) $g(g^{-1}(x))$

g) $g(h^{-1}(x))$

h) $h(g(3))$

i) $h[g^{-1}(-5)]$

7 Função Polinomial do 1º Grau

FUNÇÃO CONSTANTE

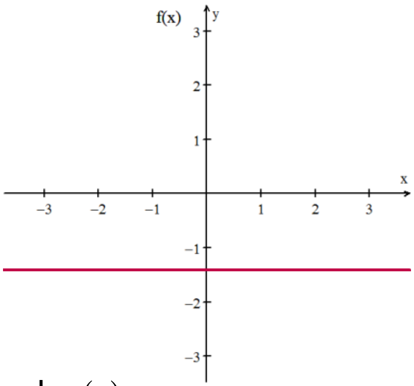
Dado um número real **c**, chama-se função constante a função $f(x)$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = c$, e graficamente é representada por uma reta paralela ao eixo x. Essa função apresenta $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \{c\}$.

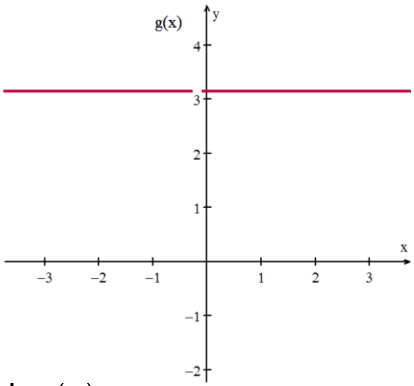
Exemplo 7.1

Esboce o gráfico das funções: $f(x) = -\sqrt{2}$ e $g(x) = \pi$.

Resolução

Se observarmos as funções f(x) e g(x), para qualquer valor real que x assume a imagem correspondente sempre será $-\sqrt{2}$ e π, respectivamente.





x	f(x)
−10	$-\sqrt{2}$
0	$-\sqrt{2}$
10	$-\sqrt{2}$

x	g(x)
−10	π
0	π
10	π

FUNÇÃO POLINOMIAL DO 1º GRAU

Dados os números reais **a** e **b**, com $a \neq 0$ chama-se função do 1º grau a função $f(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax + b$, em que **a** é chamado *coeficiente angular* e **b** é chamado *coeficiente linear*. Essa função apresenta D(f) $= \mathbb{R}$ e Im(f) $= \mathbb{R}$.

O coeficiente angular (a), graficamente, indica se a função é crescente ($a > 0$) ou decrescente ($a < 0$) e também sua declividade. O coeficiente linear (b) indica a ordenada do ponto em que a reta intercepta o eixo *y*.

Exemplo 7.2

Nas funções a seguir, indique: coeficiente linear, coeficiente angular e se a função é crescente ou decrescente.

Função	Coeficiente angular	Coeficiente linear	Crescente ou decrescente
$f(x) = 5x$	5	0	crescente
$g(x) = \frac{x}{7} + \sqrt{8}$	$\frac{1}{7}$	$\sqrt{8}$	crescente
$h(x) = -x + 2{,}31$	-1	2,31	decrescente

RAIZ DA FUNÇÃO E ESTUDO DO SINAL

Raiz ou Zero de uma função é o valor de **x** para que a função $f(x) = ax + b$ se anule, ou seja, para o qual $f(x) = 0$. Assim, o valor de **x** que satisfaz essa igualdade é dito raiz ou zero da função e é obtido pela relação $x = -\frac{b}{a}$.

O estudo do sinal de uma função afim consiste em determinar os valores de **x** do domínio da função para os quais $f(x) > 0$ e $f(x) < 0$, também podendo ser realizado através do zero da função.

Exemplo 7.3

Um comerciante gastou R$ 600,00 na compra de um lote de medicamentos. Como cada medicamento será vendido a R$ 3,00, ele deseja saber quantos medicamentos devem ser vendidos para que haja lucro no final da venda.

Resolução

O resultado é obtido através da função $f(x)=3x-600$, em que x indica o número de medicamentos a serem vendidos. O ponto de equilíbrio dá-se quando $f(x)=0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x - 600 \\ 0 &= 3x - 600 \\ 600 &= 3x \\ 200 &= x \end{aligned}$$

- Vendendo 200 medicamentos, não haverá lucro nem prejuízo; para $x = 200$, temos $f(x) = 0$.
- Vendendo mais que 200 medicamentos, haverá lucro; para $x > 200$, temos $f(x) > 0$.
- Vendendo menos que 200 medicamentos, haverá prejuízo; para $x < 200$, temos $f(x) < 0$.

GRÁFICO DA FUNÇÃO DO 1º GRAU

O gráfico de uma função polinomial do 1º grau é uma reta (não paralela ao eixo x, nem ao eixo y) e seu esboço pode ser feito através de algumas considerações:

I. O zero da função representa o local onde a função intercepta o eixo das abscissas, apresentando o par ordenado (raiz, 0).

II. O valor do termo independente (b) indica o ponto onde a reta intercepta o eixo das ordenadas, é o ponto (0, b).

III. É elegante determinar qualquer outro ponto por onde a reta passa, escolhendo aleatoriamente um valor para **x**, que, quando substituído na função, apresentará um outro par ordenado (x_1, y_1).

Desejando escolher mais pontos, siga em frente!

Exemplo 7.4

Construa o gráfico das funções a seguir.

a) $f(x) = 5x - 3$

x	f(x)
0	–3
$\frac{3}{5}$	0
2	7

$D(f) = \mathbb{R}$
$Im(f) = \mathbb{R}$
Função Crescente (a>0)

b) $g(x) = -2x - 4$

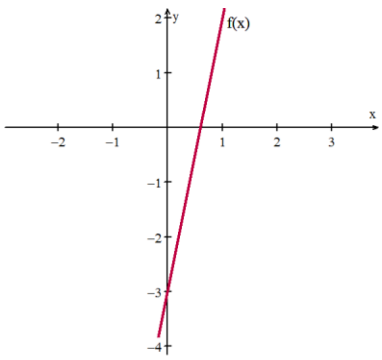
x	g(x)
0	–4
–2	0
–1	–2

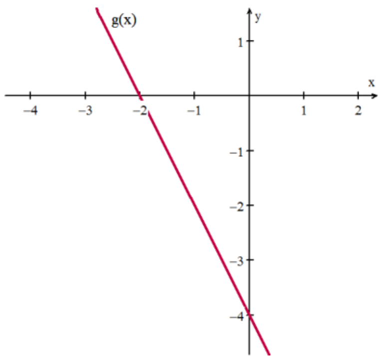
$D(f) = \mathbb{R}$
$Im(f) = \mathbb{R}$
Função Decrescente (a<0)

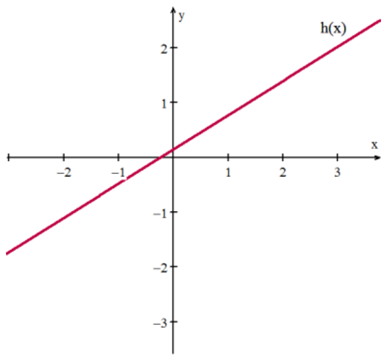
c) $h(x) = \frac{5}{8}x + \frac{1}{7}$

x	h(x)
0	$\frac{1}{7}$
$-\frac{8}{35}$	0
2	$\frac{39}{28}$

$D(f) = \mathbb{R}$
$Im(f) = \mathbb{R}$
Função Crescente (a>0)

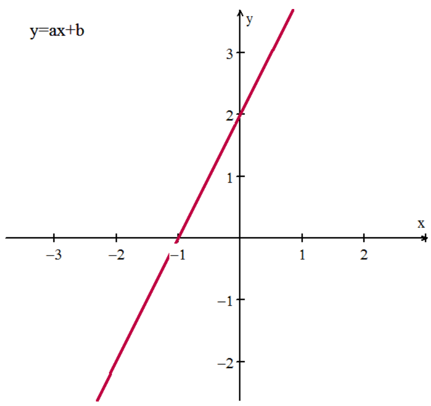






Exemplo 7.5

Encontre a lei de formação da função representada pelo gráfico a seguir:



Resolução

Temos por objetivo encontrar os valores de a e b na função $f(x) = ax + b$. Para tal, é necessário conhecer, no mínimo, 2 pontos pertencentes à função:

- b=2, onde corta o eixo das ordenadas.
- P(–1, 0), ponto para encontrar o coeficiente angular.

$$
\begin{aligned}
& y = ax + b \\
& y = ax + 2 \\
P(-1{,}0) \rightarrow\ & 0 = a(-1) + 2 \\
& 0 = -a + 2 \\
& a = 2
\end{aligned}
$$

Assim, $y = 2x + 2$.

Exercícios – Capítulo 7

1. Nas funções a seguir, indique os coeficientes (angular e linear) e diga se a função é crescente ou decrescente.

a) $f(x) = \frac{x}{4} - 2$

b) $f(x) = (x-2)^2 - (4 + x^2)$

c) $f(x) = \frac{x-2}{4} - 5$

d) $f(x) = -\frac{2}{5}x + \frac{1}{8}$

2. Determine **k** de modo que as funções sejam crescentes.

a) $f(x) = (k-1)x - 5$

b) $f(x) = 21 + (3k-2)x$

c) $y = -(8k - 98)x + 25$

d) $f(x) = \left(\frac{\sqrt{3} - k}{33}\right)x - 456$

3. Construa o gráfico das funções abaixo, descreva o conjunto domínio e o conjunto imagem, após, diga se a função é crescente, decrescente ou constante.

a) $f(x) = 2x + 1$

b) $f(x) = -2x$

c) $f(x) = -2x + 1$

d) $f(x) = -2 - \frac{2}{3}x$

e) $f(x) = 1 + x$

f) $f(x) = 0{,}5x + 4$

g) $f(x) = -5x + 10$

h) $f(x) = 1{,}3x + 1{,}5$

i) $f(x) = -4$

4. Realize o estudo do sinal para as funções do exercício 3.

5. Classifique as afirmativas abaixo como verdadeiras ou falsas.

( ) Uma função do 1º grau com coeficiente angular positivo é crescente.

( ) O coeficiente linear de uma função do 1º grau determina o valor onde a função intercepta o eixo horizontal.

( ) É possível usar uma escala para o eixo vertical diferente da escala usada no eixo horizontal.

( ) Em qualquer função do 1º grau, o zero da função é o ponto O (0,0), que representa a origem do sistema.

( ) Uma função do tipo $f(x)=5x^2+3x-5$ é uma função do 1º grau.

6. Determinar a equação da reta que passa pelo ponto (2,7) e tem como coeficiente angular –4.

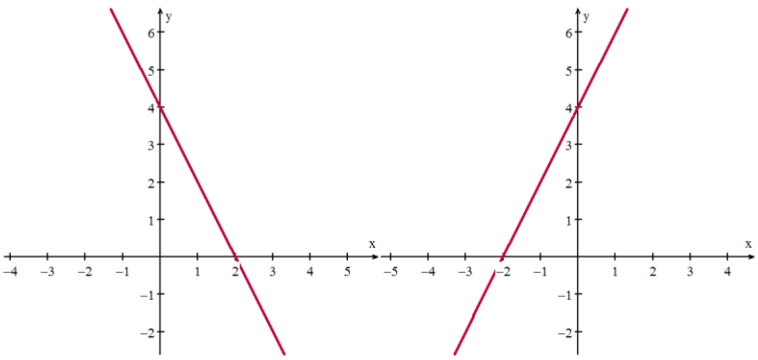
7. Determine o valor de **p** para que o gráfico da função $f(x)=-2x+p+1$:

a) intersepte o eixo **y** no ponto (0, 6);

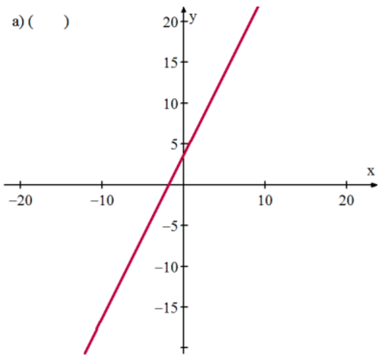
b) intersepte o eixo **x** no ponto (5, 0);

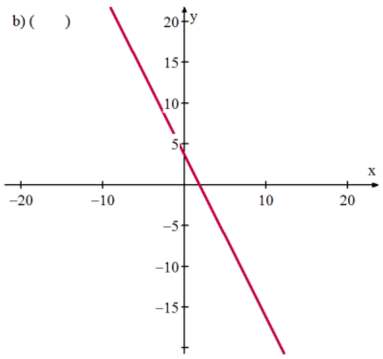
8. Certa empresa de telefonia cobra, por mês, R$ 54,90 para fornecer 5 Mega de banda larga, R$ 71,10 por serviços de telefonia fixa e R$ 0,75 por cada ligação de fixo para móvel. Sabendo que Dalcimar pagou R$ 174,75 no mês de maio, quantas ligações ele fez de fixo para móvel?

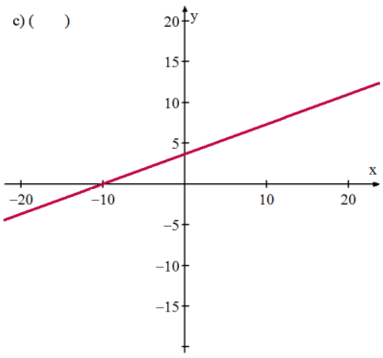
9. Determine as leis de formação correspondentes aos gráficos abaixo:



10. Qual gráfico que melhor representa a função $y = \frac{11}{30}x + \frac{11}{3}$?







11. A reta *r*, contém os pontos $(0,4)$ e $(7,7)$. Quais das sentenças abaixo são verdadeiras?

a) Os pontos $(-7,1)$ e $(-14,2)$ pertencem a reta *r*.

b) Os pontos $(7,7)$ e $(14,10)$ pertencem a reta *r*.

c) Os pontos $(-7,1)$ e $(-14,-2)$ pertencem a reta *r*.

d) Os pontos $(7,7)$ e $(14,-10)$ pertencem a reta *r*.

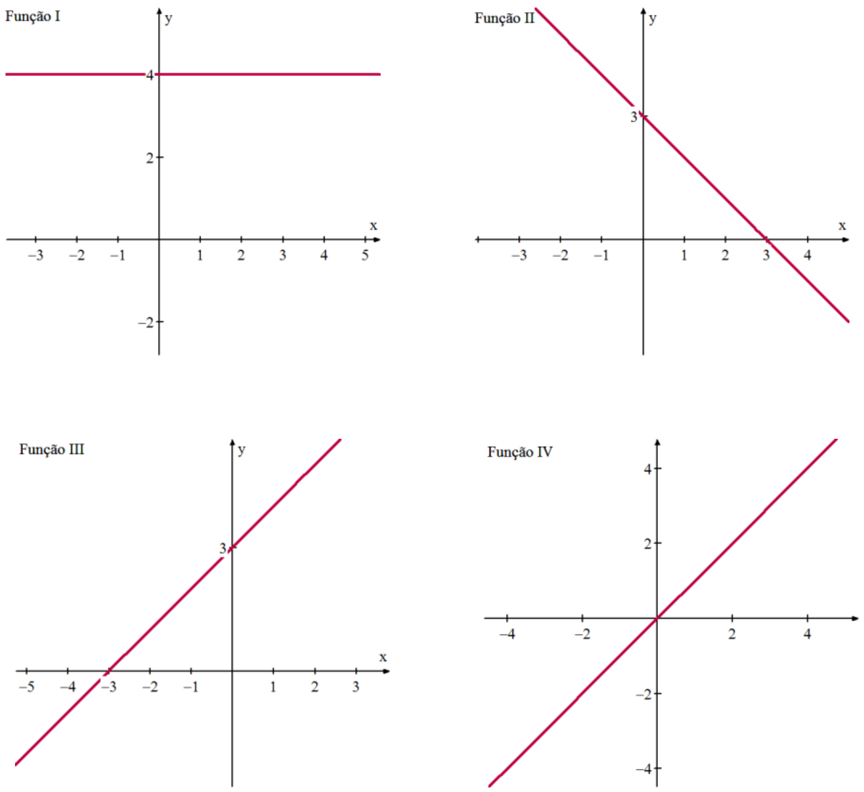
12. Observe as sentenças e os gráficos a seguir:

a) $f(x) = -x + 3$

b) $f(x) = x$

c) $f(x) = x + 3$

d) $f(x) = 4$



A alternativa que faz a associação correta de cada sentença com seu gráfico é:

a) A – I, B – III, C – IV, D – II

b) A – II, B – IV, C – III , D – I

c) A – I, B – IV, C – II , D – III

d) A – II, B – III, C – IV , D – I

13. Encontre uma regra para uma função linear, dados $f(5) = -7$ e $f(-5) = 10$.

14. Seja $f(x) = ax + b$ (a e b $\in \mathbb{R}$), definida em $f(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(1) = 3$ e $f(3) = 8$, determine $f(2)$.

15. Um motorista de táxi cobra R$ 5,20 a bandeirada mais R$ 3,20 por quilômetro rodado. Quando triplicamos o percurso, o custo da nova corrida é igual, maior ou menor que o custo do triplo da corrida original?

16. Estatisticamente foi comprovado que a maior parte da grande quantidade de mortes, por assassinato, de motoristas de táxi ocorre com profissionais que trabalham no turno da noite. Esses profissionais arriscam suas vidas pelo simples fato de que, à noite, podem rodar com outro valor de tarifa. Em uma determinada região, o preço de uma corrida é calculado da seguinte forma:

- bandeirada R$ 3,00;
- R$ 2,61, preço da corrida em função do quilômetro rodado durante o dia – bandeira 1;
- durante a noite, o quilômetro rodado sofre um aumento de 15% em relação à bandeira 1, chamada, então, bandeira 2.

Determine a função que melhor representa o valor a ser pago ***p***, em função do quilômetro rodado ***x,*** para a bandeira 2.

17. Suponha que o custo de produção de 50 unidades de uma mercadoria seja R$ 27.000,00, enquanto o custo para produzir 100 unidades da mesma mercadoria seja R$ 38.000,00. Se a função de custo C(x) é assumida como sendo linear, encontre a regra para C(x). Use a regra para estimar o custo de produção de 80 unidades da mercadoria.

18. O preço da venda de um livro é de R$ 18,70 a unidade. A receita total obtida pela venda desse livro pode ser calculada pela fórmula: receita = preço de venda por unidade vezes quantidade de livros vendidos.

    a) Indicada por x a quantidade de livros vendidos, escreva a lei dessa função.

    b) Essa função é linear?

    c) A receita total é diretamente proporcional ao número de livros vendidos?

19. Um vendedor autônomo recebe uma comissão de 5,7% sobre o total de suas vendas no mês. Portanto, a comissão que ele recebe é dada em função de suas vendas.

    a) Se indicarmos por **v** esse total de vendas, qual é a lei da função que representa a comissão do vendedor?

    b) Essa função é linear?

    c) Em um mês em que a venda foi de R$ 245.236,20, qual foi a comissão do vendedor?

20. Uma máquina, ao sair da fábrica, sofreu uma desvalorização constante pelo seu uso, representada pela função $P(t) = 200 - 12{,}2t$, em que P é o preço da máquina (em reais) e t é o tempo de uso (em anos). Determine:

a) o custo da máquina ao sair da fábrica;

b) o custo da máquina após 5 anos de uso;

c) o tempo para que a máquina se desvalorize totalmente.

21. [5]Simpson, Roe Lewontin (1960, p. 218) afirmaram que, nas fêmeas da cobra *Lampropeltis polyzona,* o comprimento total y é uma função linear do comprimento da cauda x, com grande precisão. O domínio é o intervalo compreendido entre 30 mm e 200 mm, e a imagem é o intervalo compreendido entre 200 mm e 1400 mm. São dados os dois pontos seguintes:

$x_0 = 60$ mm e $y_0 = 455$ mm

$x_1 = 140$ mm e $y_1 = 1050$ mm

Determinar a equação y como uma função de x.

22. [6]Nos pulmões, o ar atinge a temperatura do corpo. O ar exalado tem temperatura inferior à do corpo, já que é resfriado nas paredes do nariz. Foram feitas medidas em carriça de cactus (pequeno pássaro do deserto). Para a temperatura ambiente, o domínio foi $\{TA/ 12^o < TA < 30^o\}$. A temperatura do ar exalado T_E depende linearmente da temperatura T_A: $T_E = 8{,}51 + 0{,}756T_A$ (função empírica). Traçar um gráfico dessa função e determinar a imagem.

[5] *Introdução a matemática* para biocientistas, de E. Batschelet, pág.80, exercício 3.6.13.
[6] *Introdução a matemática* para biocientistas, de E. Batschelet, pág.81, exercício 3.6.16.

Função Polinomial do 2º Grau 8

FUNÇÃO POLINOMIAL DO 2º GRAU

Dados os números reais **a, b e c**, com a ≠ 0 chama-se função do 2º grau ou função quadrática a função $f(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$. Essa função apresenta como D(f) = $\mathbb{R}$ e como imagem um subconjunto dos reais.

Exemplo 8.1

As funções a seguir representam funções quadráticas:

$f(x) = x^2 - 4x - 3$ $\quad$ $g(x) = 3 - 2x^2$ $\quad$ $h(x) = 6x^2$

RAÍZES DA FUNÇÃO E ESTUDO DO SINAL

Raízes ou Zeros de uma função do 2º grau são os valores de **x** para os quais a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ se anula, ou seja, para o qual $f(x) = 0$, assim como na função do 1º grau.

O estudo do sinal de uma função quadrática consiste em determinar os valores de **x** (domínio) para os quais $f(x) > 0$ e $f(x) < 0$, este também pode ser realizado através do zero da função.

GRÁFICO DA FUNÇÃO DO 2º GRAU

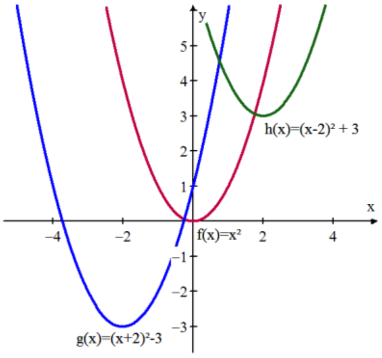
O gráfico de uma função polinomial do 2º grau é uma parábola que pode apresentar sua concavidade voltada para cima (caso a > 0, apresentando ponto de mínimo), ou para baixo (caso a < 0, apresentando ponto de máximo). O esboço do gráfico pode ser feito através de algumas considerações:

- o zero da função representa os locais onde a função toca o eixo das abscissas, portanto, sempre que possível, é interessante ter determinado esses pontos (podem ser encontrados através da equação resolutiva do 2º grau);
- toda parábola tem ou um ponto de ordenada máxima, ou um ponto de ordenada mínima, o qual é denominado **vértice da parábola** e representado por $v\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)$, sendo este um ponto de extrema importância ao gráfico. Não podemos deixar de calculá-lo!
- o valor do termo independente (c) indica o ponto onde a parábola intercepta o eixo das ordenadas, é o ponto $(0,c)$.
- se necessário, pode-se calcular qualquer outro ponto por onde a parábola passa, para isso, basta escolher aleatoriamente um valor para a variável independente x e, substituí-lo na função desejada.
- quando a função não possui raízes reais, devem-se calcular outros pontos da parábola (escolhendo alguns valores para *x* a direita e também a esquerda do vértice).
- toda função do 2º grau possui um eixo de simetria vertical que passa pelo vértice. Lembre-se desse detalhe!

Exemplo 8.2

Observe os gráficos das funções quadráticas $f(x)=x^2$, $g(x)=(x+2)^2-3$ e $h(x)=(x-2)^2+3$ e determine o conjunto domínio, o conjunto imagem e os zeros da função.

Função	Domínio	Imagem	Raízes
$f(x)=x^2$	$\mathbb{R}$	$[0,\infty)$	$x=0$
$g(x)=(x+2)^2-3$	$\mathbb{R}$	$[-3,\infty)$	$x=\pm\sqrt{3}-2$
$h(x)=(x-2)^2+3$	$\mathbb{R}$	$[3,\infty)$	Não existe



Exemplo 8.3

Construa o gráfico da função $f(x) = x^2 + 2x - 3$ e determine o conjunto domínio e o conjunto imagem.

Resolução

Calculam-se as raízes, se existirem, e o vértice da função.

Raízes:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 16$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = -3$$

$$x_2 = 1$$

Vértice da função:

$$x_v = -\frac{b}{2a} \qquad y_v = -\frac{\Delta}{4a}$$

$$x_v = -\frac{2}{2 \cdot 1} \qquad y_v = -\frac{16}{4 \cdot 1}$$

$$x_v = -1 \qquad y_v = -4$$

Após, armazenamos as informações em uma tabela:

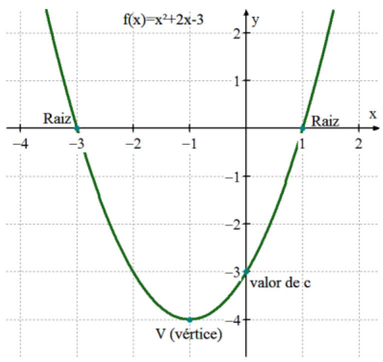
	x	f(x)
X_1	–3	0
(x_v, y_v)	–1	–4
X_2	1	0

As informações da tabela são suficientes para fazermos o esboço do gráfico. Se pretendermos um gráfico mais detalhado, podemos calcular outros pontos, respeitando a simetria.

	x	f(x)
	–5	12
X_1	–3	0
(x_v, y_v)	–1	–4
X_2	1	0
	3	12

$D(f) = \mathbb{R}$

$Im(f) = [-4, \infty[$



Exemplo 8.4

Dada a função $f(x) = -x^2 + x + 2$, determine:

a) o esboço do gráfico;

b) o conjunto domínio e o conjunto imagem;

c) os intervalos de crescimento e decrescimento da função.

Resolução

a) Calculando o vértice e os zeros da função, obtemos:

Zeros da função:

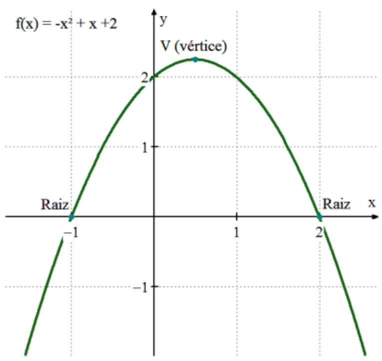
$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = 9$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x_1 = -1$$
$$x_2 = 2$$

Vértice da função:

$$x_v = -\frac{b}{2a} \qquad y_v = -\frac{\Delta}{4a}$$
$$x_v = -\frac{1}{2 \cdot (-1)} \qquad y_v = -\frac{9}{4 \cdot (-1)}$$
$$x_v = 0{,}5 \qquad y_v = 2{,}25$$

Armazenando as informações,

	x	f(x)
X_1	–1	0
(x_v, y_v)	0,5	2,25
X_2	2	0



Ampliando a tabela, tem-se:

	x	f(x)
	–3	–10
X_1	–1	0
(x_v, y_v)	0,5	2,25
X_2	2	0
	4	–10

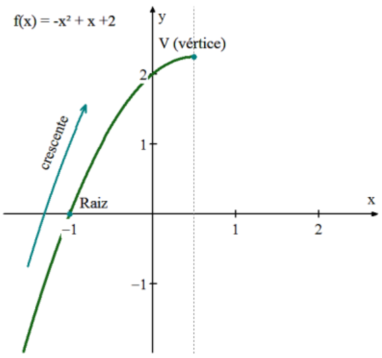
b) $D(f) = \mathbb{R}$

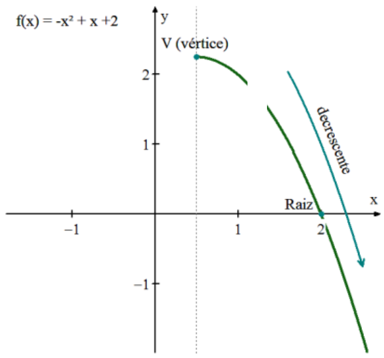
$Im(f) = (-\infty; 2{,}25]$

c) Observando o gráfico é possível verificar que a função quadrática (ou toda função quadrática), apresenta intervalos crescente e decrescente ao longo do domínio. O limite dos intervalos onde a função cresce ou decresce dá-se exatamente no eixo de simetria, assim, a função em estudo apresenta os seguintes intervalos:

crescente $]-\infty; 0{,}5[$

decrescente $]0{,}5; \infty[$





Exemplo 8.5

Para a função $f(x) = x^2 + 3x + 5$, esboce seu gráfico e determine o conjunto domínio e o conjunto imagem.

Resolução

Cálculo do discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = -11$$

Observamos que essa função não apresenta raízes reais, pois $\Delta < 0$.

Vértice da função:

$$x_v = -\frac{b}{2a} \qquad y_v = -\frac{\Delta}{4a}$$

$$x_v = -\frac{3}{2 \cdot 1} \qquad y_v = -\frac{(-11)}{4 \cdot 1}$$

$$x_v = -1{,}5 \qquad y_v = 2{,}75$$

Armazenando as informações,

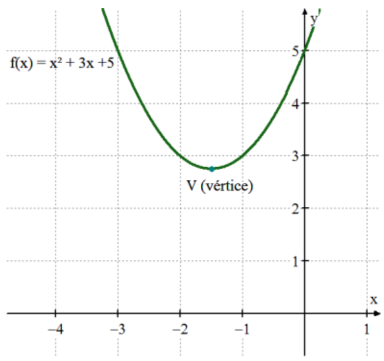
	x	f(x)
(x_v, y_v)	$-1{,}5$	$2{,}75$

As informações da tabela não são suficientes para fazermos o esboço do gráfico. Precisamos calcular outros pontos, respeitando a simetria.

	x	f(x)
	-4	9
(x_v, y_v)	$-1{,}5$	$2{,}75$
	1	9

$D(f) = \mathbb{R}$

$Im(f) = [2{,}75; \infty[$



Exemplo 8.6

Realize o estudo do sinal das funções e descreva o intervalo onde estas são crescentes ou decrescentes:

a) $f(x) = x^2 - 3x - 4$

b) $f(x) = -x^2 + 6x - 9$

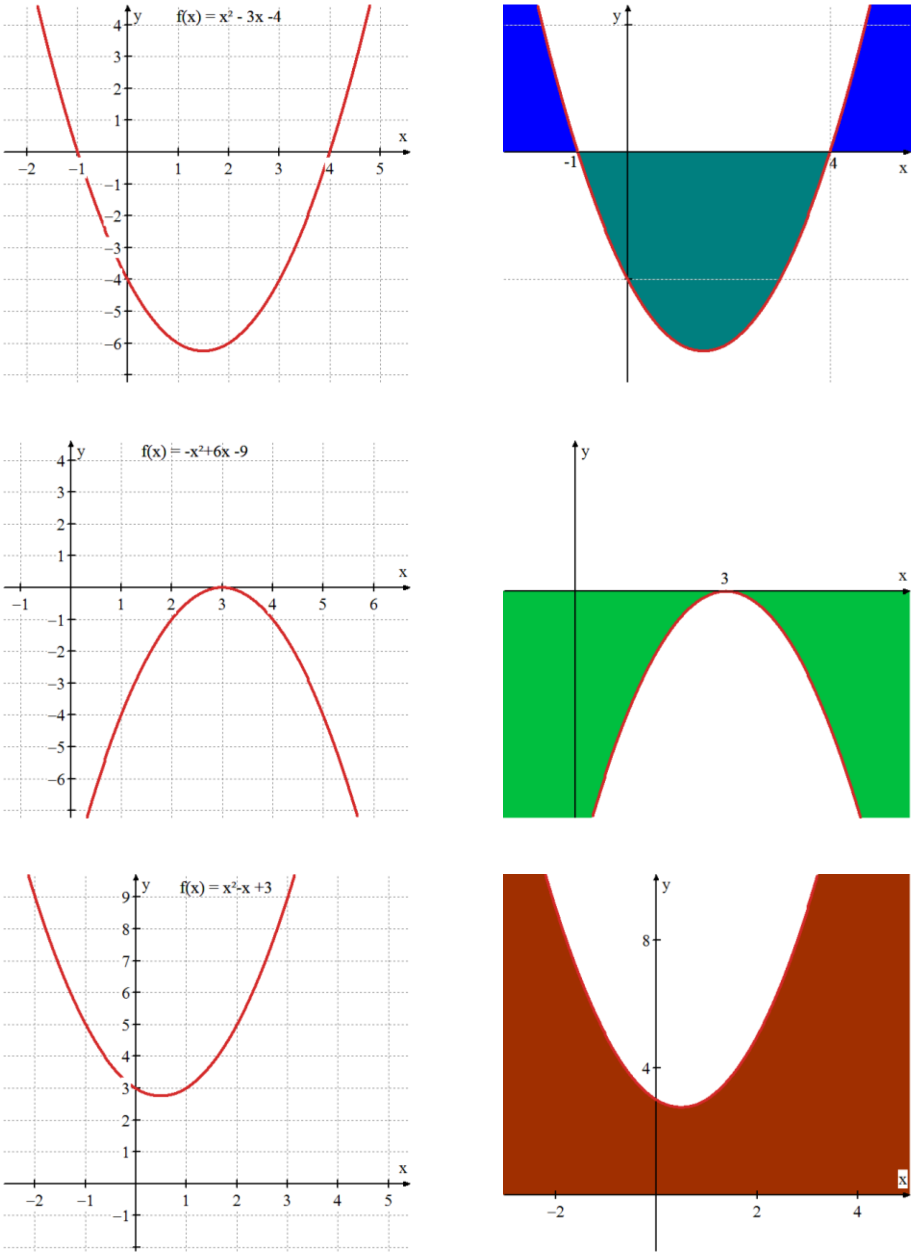
c) $f(x) = x^2 - x + 3$

Resolução

O estudo do sinal consiste em determinar os intervalos do domínio da função em que $f(x) = 0$, $f(x) > 0$ (valores positivos de y) e $f(x) < 0$ (valores negativos de y); para tal, é necessário encontrar os zeros da função (caso existam) e esboçar seu gráfico.

A análise gráfica do intervalo em que a função é crescente ou decrescente consiste em traçar uma linha vertical passando pelo vértice da função.

Observe os gráficos a seguir.



A análise gráfica permite concluir que:

A função $f(x) = x^2 - 3x - 4$ apresenta como raízes x=–1 e x=4, logo:

$f(x) = 0 \Rightarrow \{-1,4\}$
$f(x) > 0 \Rightarrow (-\infty,-1) \cup (4, \infty)$
$f(x) < 0 \Rightarrow (-1,4)$
Crescente: $(1,5; \infty)$ e decrescente: $(-\infty; 1,5)$

A função $f(x) = -x^2 + 6x - 9$ apresenta como raiz x=3, logo:

$f(x) = 0 \Rightarrow \{3\}$

$f(x) > 0 \Rightarrow$ não existe

$f(x) < 0 \Rightarrow \mathbb{R} - \{3\}$

Crescente: $(-\infty; 3)$ e decrescente: $(3; \infty)$

A função $f(x) = x^2 - x + 3$ não apresenta raiz real, logo:

$f(x) = 0 \Rightarrow$ não existe

$f(x) > 0 \Rightarrow \mathbb{R}$

$f(x) < 0 \Rightarrow$ não existe

Crescente: $(0,5; \infty)$ e decrescente: $(-\infty; 0,5)$

Exercícios – Capítulo 8

1. Construa um esboço do gráfico das funções a seguir, destacando, em todos os casos, o conjunto domínio, o conjunto imagem, os zeros da função (se existirem), o vértice, o estudo do sinal e o intervalo em que a função é crescente ou decrescente.

   a) $f(x) = x^2 - 7x + 10$

   b) $f(x) = -2x^2 + 14x - 20$

   c) $f(x) = -3x^2 + 12x - 15$

   d) $f(x) = x^2 - 10x - 375$

   e) $f(x) = -x^2 + 9$

   f) $f(x) = x^2 - 4{,}5x$

   g) $f(x) = -x^2$

   h) $f(x) = -5x^2 + 3x - 1$

2. A reta, obtida através do gráfico da função $f(x) = -20x + 600$, e a parábola, que representa a função $g(x) = -x^2 - 10x + 600$, têm pontos em comum? Se tiverem, descubra quais são e represente a situação graficamente.

3. Seja a função $f(x)$ tal que $f(x) = x^2 + bx + c$, em que **b** e **c** são números reais. Sabendo-se que o gráfico dessa função passa pelo ponto P(0,6) e que $f(1) = 12$, determine o valor de f(2).

4. Dada a função $f(x) = 2x^2 + kx - (3k + 5)$, determine o valor de **k**, sabendo que um dos zeros da função é 2.

5. Determine **m** de modo que a função $f(x) = -4x^2 + (m + 5)x - 12$ tenha valor máximo para x = 2.

6. O gráfico a seguir representa uma função do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$. Classifique as afirmativas como verdadeiras ou falsas.

a) (   ) O valor de a é positivo.

b) (   ) O valor de c é positivo.

c) (   ) Essa função possui apenas uma raiz real.

d) (   ) O valor de b é positivo.

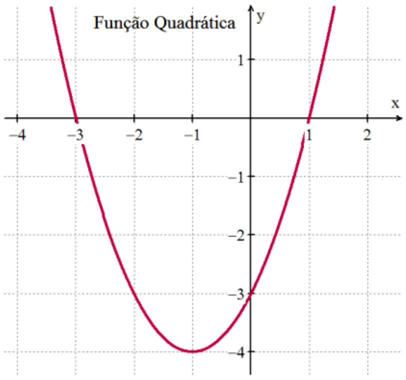
e) (   ) $f(x) > 0$ somente se $x > 0$.

f) (   ) $f(-4) \cdot f(-2) < 0$.

g) (   ) $f(15) \cdot f(-6) < 0$.

h) (   ) A função é crescente no intervalo $(-4, \infty)$.

i) (   ) $f(x) \leq 0$ no intervalo $[-3,1]$.



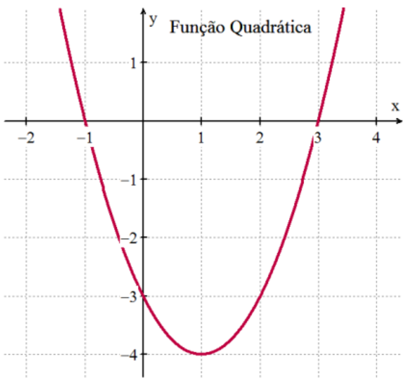
7. Observando o gráfico da função quadrática, destaque:

a) as raízes;

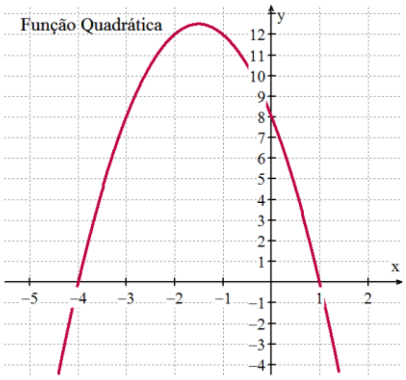
b) o valor do termo independente (c);

c) o intervalo onde ela é crescente;

d) o intervalo onde ela é positiva.



8. A figura a seguir corresponde ao gráfico de uma função quadrática. Determine sua lei de formação.



9. Considere a função f: IR→IR cujo gráfico é dado a seguir, responda se os valores de f(x) mencionados são maiores, menores ou iguais a zero.

a) f(8)

b) f(2,5)

c) f(5,2)

d) f(1)

e) f(0)

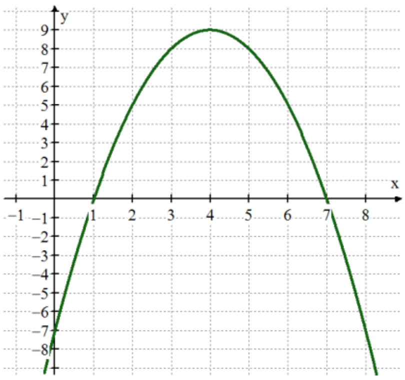
f) f(–4)

g) f(7)

h) f(250)

i) f(1,5)

j) f(6,9)



10. f: IR→IR é a função quadrática definida por $f(x) = x^2 - 5x + 4$. g(x): IR→IR é a função quadrática cujo gráfico está a seguir. A partir desses dados, responda com relação a **f** e com relação a **g**.

a) A concavidade da parábola da função fica voltada para baixo ou para cima?

b) Qual é o vértice da parábola?

c) Qual é o domínio e qual é a imagem da função?

d) A função tem valor máximo ou valor mínimo?

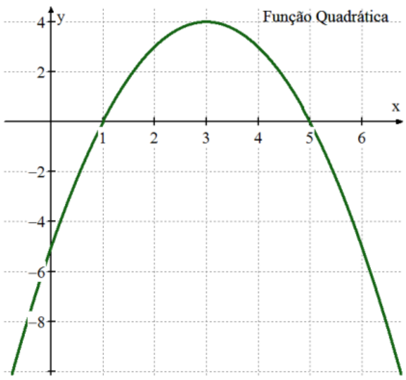
e) A função possui raízes? Caso afirmativo, quais são?

f) Em que ponto a parábola corta o eixo y?

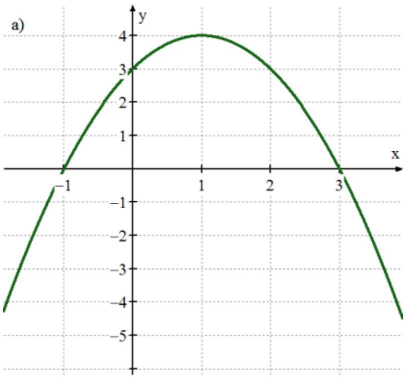
g) Em que ponto a parábola intersecta o eixo x?

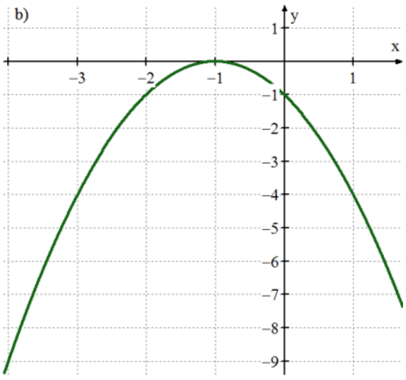
h) Determine f(4) e g(4).

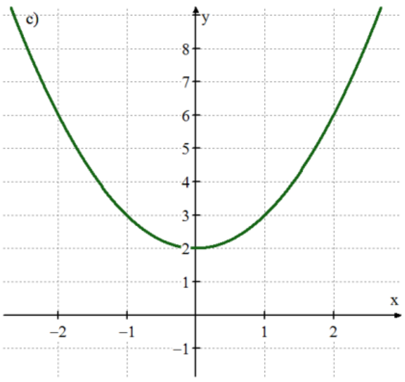
i) O ponto (6,–1) pertence ou não às funções f e g?

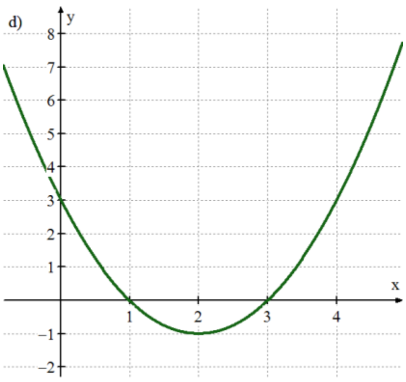


11. Em cada gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $\Delta = b^2 - 4ac$, descubra se a > 0 ou a < 0 e se $\Delta > 0$, $\Delta < 0$ ou $\Delta = 0$.









12. Seja a função f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 2x + (m+1)$ com $m \in \mathbb{R}$. Determine **m**, de modo que f(x) não corte o eixo x.

13. Determine os valores de **a** e **c**, de modo que o gráfico da função $y = ax^2 - x + c$ passe pelos pontos (1,2) e (0,4).

14. Sabendo que o ponto P(1,–12) pertence à função $f(x) = x^2 - 3x + c$, determine o valor de *c*.

15. Dadas as funções $f(x) = 5x^2 + 3$ e $g(x) = 2x + 1$, calcule o valor de:

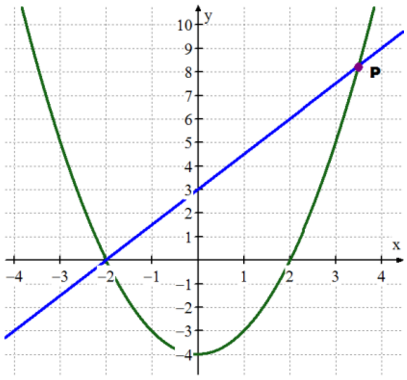
a) f(f(1))

b) g(f(0))

c) f(g(–5))

16. Sabendo que a função $p(x) = 3x^2 - (5m+1)x - 2$ tem 2 como abscissa do mínimo, determine o valor de m.

17. Considerando as funções dadas pela figura a seguir, encontre as coordenadas do ponto P.



18. Em uma partida de vôlei, um jogador deu um saque em que a bola atingiu uma altura h em metros, num tempo t, em segundos, de acordo com a relação $h(t) = -t^2 + 6t$. De quantos metros foi a altura máxima alcançada pela bola?

19. O custo para a produção de *x* unidades é dado por: $c(x) = x^2 - 20x + 1500$. Calcule o valor do custo mínimo.

20. O lucro de uma empresa é dado por $L(x) = -20x^2 + 320x - 400$, em que *x* é o número de unidades vendidas. Para quantas unidades é obtido o lucro máximo?

21. Um móvel desloca-se sobre uma trajetória retilínea com movimento uniforme variado, de acordo com a função $e = t^2 - 8t + 16$, em que ***e*** representa o espaço em metros e ***t*** representa o tempo em segundos.

a) Determinar a posição do móvel nos instantes t=0 s, t=3 s e t=6 s.

b) Determinar o instante em que o móvel se encontra a 36 m da origem.

22. Suponha que a temperatura em uma determinada cidade, durante um dia do mês de dezembro do ano 2000, das 6h às 18h, seja descrita pela função $T(t) = -\frac{5}{36}t^2 + \frac{10}{3}t + 10$, sendo que T representa a temperatura em °C e t, o tempo em horas, Considerando a previsão de que, até o ano 2050, a temperatura nessa cidade vai se elevar 0,2°C a cada 5 anos e que tenhamos, em dezembro de 2050, um dia típico como o citado acima, determine a temperatura máxima sabendo que esta ocorre às 12 horas.

23. Sabe-se que, sob um certo ângulo de tiro, a altura atingida por uma bala, em metros, em função do tempo, em segundos, é dada por $h(t) = -10t^2 + 100t$. Qual a altura máxima atingida pela bala? Em quanto tempo, após o tiro, a bala atinge a altura máxima?

24. Uma rede de farmácia da região do Vale dos Sinos compra uma forma líquida de um antibiótico de marca ***A,*** a um preço de R$ 500,00 por unidade. Se o custo total de produção para *x* unidades for $C(x) = 40000 + 20x + 0{,}012x^2$ e se a capacidade de produção da empresa for de, no máximo, 25 000 unidades em um tempo especificado, pode-se afirmar que a quantidade de unidades do medicamento que deve ser fabricada e vendida naquele tempo para maximizar o lucro é de, aproximadamente:

a) 25 000

b) 20 000

c) 4 760 000

d) 4 460 000

25. [7]Um comerciante de roupas compra ternos e camisetas para revenda e tem um orçamento limitado para compra. A quantidade de ternos é representada por *x*, a de camisetas por *y*, e a equação que dá a restrição orçamentária é $10x^2 + 10y = 1000$.

a) Expresse a quantidade de camisetas em função da quantidade de ternos comprados.

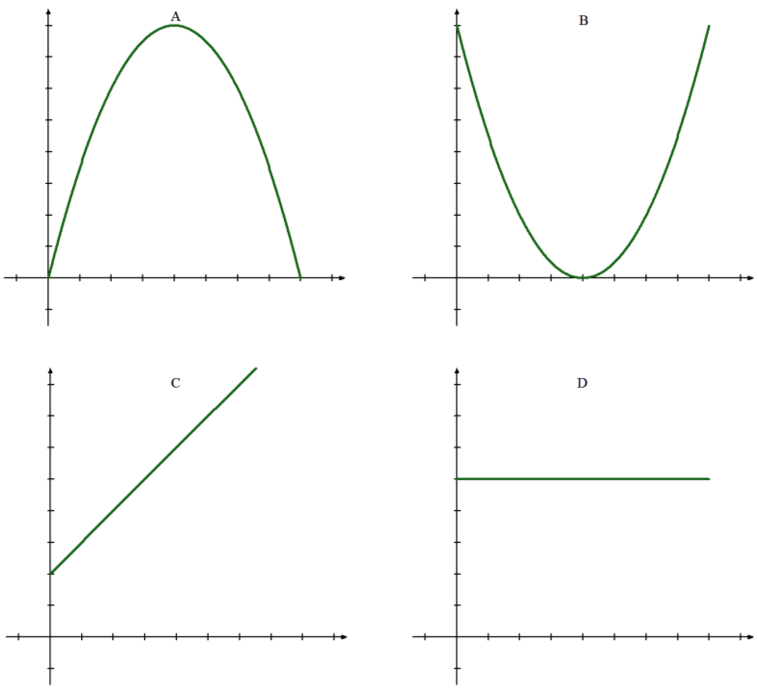
b) Se forem comprados 8 ternos, quantas camisetas é possível comprar?

c) Se forem compradas 19 camisetas, quantos ternos é possível comprar?

d) Se não forem comprados ternos, qual a quantidade de camisetas compradas?

e) Se forem comprados 7 ternos e 40 camisetas, tal compra ultrapassará o orçamento?

26. Determinados fenômenos da natureza apresentam equações que descrevem a sua trajetória. Um fenômeno bastante comum, em qualquer que seja a comunidade, é a chamada fofoca. Esta possui um público-alvo, alastra-se com rapidez e pode ser descrita pela seguinte expressão: $R(x) = kx(P - x)$, em que *k* representa uma constante positiva, *P* representa o público alvo e *x* representa o número de pessoas que conhecem o boato. O gráfico que melhor representa a rapidez (*R(x)*) com que a fofoca se alastra, para um determinado *x* real é:



[7] *Matemática aplicada à administração, economia e contabilidade*, de Afrânio Carlos Murolo e Giácomo Augusto Bonetto, p. 61.

Função Exponencial 9

FUNÇÃO EXPONENCIAL

Uma função exponencial é qualquer função na qual a regra especifica a variável independente como expoente. A função exponencial básica f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aparece na forma $f(x) = a^x$ em que *a* é uma constante real positiva e diferente de 1.

Exemplo 9.1

São funções exponenciais:

- $f(x) = 5^x$
- $g(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$
- $h(x) = 0{,}7^{x-2}$
- $g(x) = (\sqrt{2})^{x-1}$

Observações:

- $f(x) = a^x \Rightarrow f(0) = a^0 = 1$. Isso significa que o par ordenado (0,1) pertence à função exponencial.
- Tendo-se $a > 0$ e $a \neq 1$, então $a^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Assim, $Im(f) = (0, \infty)$.
- Tendo-se $a > 0$ e $a \neq 1$, devemos analisar duas situações:

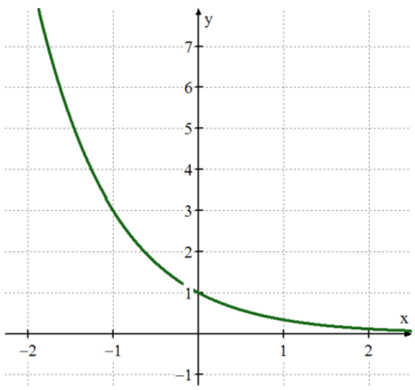
- $a > 1,\ x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, logo *f* é crescente.
- $0 < a < 1,\ x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, logo *f* é decrescente.
- Quando representamos graficamente a função exponencial, temos uma reta horizontal assíntota (y=0), que representa o limite inferior da função.

Exemplo 9.2

Veja a seguir os gráficos das diferentes funções exponenciais.

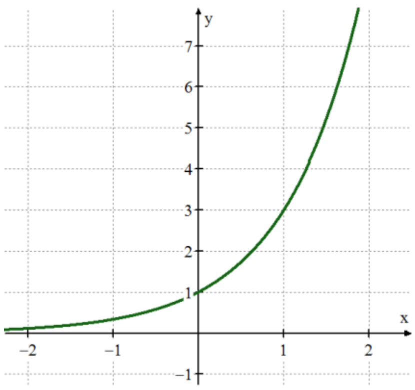
A função $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ é uma função decrescente, apresenta como conjunto imagem $Im(f) = (0, \infty)$ e conjunto domínio $D(f) = \mathbb{R}$.
Para construir seu gráfico, determinam-se alguns pontos:

x	f(x)
–3	27
–2	9
–1	3
0	1
1	0,33



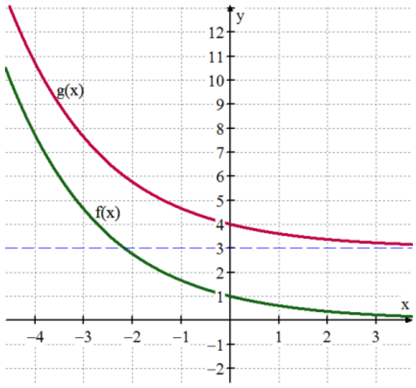
A função $f(x) = 3^x$ é uma função crescente que apresenta como conjunto imagem $Im(f) = (0, \infty)$ e conjunto domínio $D(f) = \mathbb{R}$.

x	f(x)
–1	0,33
0	1
1	3
2	9
3	27



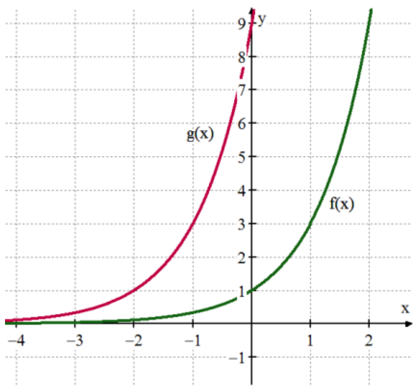
As funções $f(x)=\left(\dfrac{3}{5}\right)^x$ e $g(x)=\left(\dfrac{3}{5}\right)^x+3$ são funções decrescentes e apresentam $D(f)=\mathbb{R}$, porém o conjunto imagem é diferente, isto é, a primeira função apresenta $Im(f)=(0,\infty)$ e a segunda função, $Im(f)=(3,+\infty)$. Essa diferença na imagem ocorre devido ao fato de que a função g(x) somou 3 unidades em cada elemento da imagem da função f(x).

x	f(x)	g (x)
–4	7,716	10,716
–2	2,7778	5,7778
0	1	4
1	0,6	3,6
4	0,1296	3,1296



As funções $f(x)=3^x$ e $g(x)=3^{x+2}$ são funções crescentes e apresentam $D(f)=\mathbb{R}$ e $Im(f)=(0,\infty)$, pois o deslocamento foi somente no eixo x.

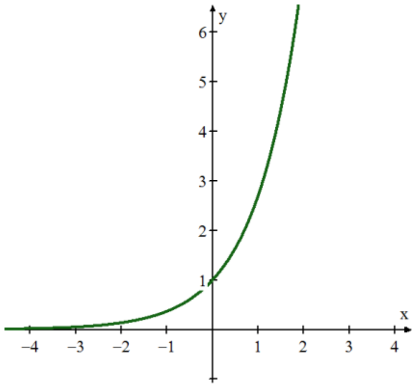
X	f(x)	g(x)
–2	0,1111	1
–1	0,3333	3
0	1	9
1	3	27



O NÚMERO *e*

O número ***e*** é chamado de base exponencial natural. Define-se como $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$; ***e*** é um número irracional com valor aproximado de 2,718 281 828 459 045 09... Graficamente, $f(x)=e^x$ está representada a seguir.

x	f(x)
–1	0,3679
0	1
1	2,7183
2	7,3890
3	20,0855



EQUAÇÕES EXPONENCIAIS

Toda a equação cuja incógnita se apresenta no expoente de uma ou mais potências de bases positivas diferentes de 1 é dita exponencial, como, por exemplo:

a) $2^x = 16$ b) $\left(\frac{2}{5}\right)^{x+1} = \frac{125}{8}$ c) $2^x = 1$.

A resolução de uma equação exponencial consiste em igualar as bases (quando possível) e resolver a equação extraída dos expoentes.

Exemplo 9.3

Resolva em $\mathbb{R}$ as equações:

a) $2^x = 16$

Resolução

Primeiro, devemos igualar as bases, isto é, escrever 16 na base 2 $(2^4 = 16)$, em seguida, resolvemos a equação resultante dos expoentes:

$$2^x = 16$$
$$2^x = 2^4$$
$$x = 4$$

Logo, $S = \{4\}$.

b) $\left(\frac{2}{5}\right)^{x+1} = \frac{125}{8}$

Resolução

A equação transformada numa igualdade de potências de mesma base deve fatorar 125 e 8, reescrevendo em base 5 e 2, respectivamente.

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{x+1} = \frac{125}{8}$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{x+1} = \frac{5^3}{2^3}$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{x+1} = \left(\frac{5}{2}\right)^{3}$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{x+1} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-3}$$

$$x + 1 = -3$$

$$x = -3 - 1$$

$$x = -4$$

Logo, $S = \{-4\}$.

c) $2^x = 1$

Resolução

O número 1 pode ser escrito como $2^0 = 1$.

$$2^x = 1$$

$$2^x = 2^0$$

$$x = 0$$

Logo, $S = \{0\}$.

As aplicações da função exponencial, em geral, classificam-se como crescimento (função exponencial crescente) e decaimento (função exponencial decrescente). Como exemplo de aplicações exponenciais podemos destacar: juros compostos, crescimento populacional ilimitado, crescimento populacional logístico e decaimento radioativo, dentre outras.

Exemplo 9.4

Estime a quantidade de dinheiro disponível se R$ 1.000,00 são investidos a 3% a.a de juros, durante 5 anos, capitalizados:

a) anualmente;

b) trimestralmente;

c) mensalmente;

d) diariamente.

Resolução

Se o principal de *P* reais é investido a uma taxa anual de juros *i*, e os juros são creditados *n* vezes ao ano, o montante M(t) gerado em um período de tempo *t* é dado pela fórmula:

$$M(t) = P\left(1+\frac{i}{n}\right)^{nt}$$

Como nesse exemplo a capitalização é gerada após um período de t anos, usamos a primeira relação, assim, a quantidade de dinheiro disponível após:

a) 5 anos, com P=1000, i=0,03, t=5 e n=1.

$$M(5) = 1000\left(1+\frac{0{,}03}{1}\right)^{1\cdot 5} = 1.159{,}27$$

Após 5 anos terá disponíveis R$ 1.159,27.

b) trimestral, com P=1000, i=0,03, t=5 e n=4.

$$M(5) = 1000\left(1+\frac{0{,}03}{4}\right)^{4\cdot 5} = 1.161{,}18$$

Após 5 anos terá disponíveis R$ 1.161,18.

c) mensalmente, com P=1000, i=0,03, t=5 e n=12.

$$M(5) = 1000\left(1+\frac{0{,}03}{12}\right)^{12\cdot 5} = 1.161{,}62$$

Após 5 anos terá disponíveis R$ 1.161,62.

d) diariamente, com P=1000, i=0,03, t=5 e n=365.

$$M(5) = 1000\left(1+\frac{0{,}03}{365}\right)^{365\cdot 5} = 1.161{,}82$$

Após 5 anos terá disponíveis R$ 1.161,82.

Exemplo 9.5

O número de habitantes de uma cidade é hoje 130.000. Sabe-se que essa população crescerá exponencialmente a uma taxa de 1,8% ao ano. Quantos habitantes terá daqui a 12 anos?

Resolução

Se uma população é constituída por N_0 indivíduos em um tempo inicial $t_0=0$ e for modelada como crescente e sem limites, a população N(t), em qualquer instante t posterior, é dada pela fórmula: $N(t)=N_0e^{kt}$, em que k representa uma constante.

$$T=12 \text{ anos},\ N_0=130\,000,\ k=0{,}018$$
$$N(t)=N_0e^{kt}$$
$$N(12)=130\,000e^{0{,}018\cdot 12}=161\,343{,}31$$

Após 12 anos, essa cidade terá aproximadamente 161 344 habitantes.

Exemplo 9.6

Em determinada ilha, a população inicial é de 500 indivíduos e estima-se que a população que se manterá constante em longo prazo será de 5 400 indivíduos. Se a taxa de crescimento populacional dessa ilha é de 5% ao ano, determine o número de habitantes após:

a) 10 anos;

b) 20 anos;

c) 100 anos.

Resolução

Se uma população é constituída por N_0 indivíduos em um tempo inicial $t_0=0$ e for modelada como crescente e com uma população limite (P), a população N(t), em qualquer instante t posterior, é dada pela fórmula:

$$N(t)=\frac{N_0P}{N_0+(P-N_0)e^{-kt}}$$, em que k representa uma constante.

a) 10 anos, com $P_0=500$, $i=0{,}05$, $t=10$ e $P=5\,400$

$$N(10)=\frac{500\cdot 5\,400}{500+(5\,400-500)e^{-0{,}05\cdot 10}}$$

$$N(10)=\frac{2\,700\,000}{500+(4\,900)e^{-0{,}5}}=777{,}65$$

Após 10 anos, essa ilha terá aproximadamente 778 habitantes.

b) 20 anos, com $P_0=500$, $i=0{,}05$, $t=20$ e $P=5\,400$

$$N(20)=\frac{500\cdot 5\,400}{500+(5\,400-500)e^{-0{,}05\cdot 20}}$$

$$N(10)=\frac{2\,700\,000}{500+(4\,900)e^{-1}}=1\,172{,}58$$

Após 20 anos, essa ilha terá aproximadamente 1 173 habitantes.

c) 100 anos, com $P_0=500$, $i=0{,}05$, $t=100$ e $P=5\,400$

$$N(10)=\frac{500\cdot 5\,400}{500+(5\,400-500)e^{-0{,}05\cdot 100}}$$

$$N(10)=\frac{2\,700\,000}{500+(4\,900)e^{-5}}=5\,065{,}51$$

Após 100 anos, essa ilha terá aproximadamente 5 066 habitantes.

Exemplo 9.7

Num processo de decaimento radioativo, a quantidade residual *Q* de uma substância varia em função do tempo conforme a seguinte lei: $Q(t)=1320\cdot e^{-0{,}0005\cdot t}$, em que 1320 gramas era a quantidade inicial e *t,* o tempo em anos. Determinar a quantidade da substância após:

a) 10 anos
b) 150 anos
c) 500 anos

Resolução

Aplicamos diretamente a relação fornecida no problema e trocamos os valores de tempo.

a) 10 anos $\rightarrow$ $Q(t) = 1320 \cdot e^{-0,0005 \cdot 10} = 1\,313,42$

Após 10 anos, encontramos 1.313,42 gramas de material radioativo.

b) 150 anos $\rightarrow Q(t) = 1320 \cdot e^{-0,0005 \cdot 150} = 1\,224,62$

Após 150 anos, encontramos 1.224,62 gramas de material radioativo.

c) 500 anos $\rightarrow Q(t) = 1320 \cdot e^{-0,0005 \cdot 500} = 1\,028,02$

Após 500 anos, encontramos 1 028,02 gramas de material radioativo.

Exercícios – Capítulo 9

1. Resolva em IR as equações:

a) $256^{x} = 64$

b) $\left(\frac{16}{81}\right)^{x} = \frac{4}{9}$

c) $8^{x+2} = 16^{x-1}$

d) $49^{3x} = 343^{x-2}$

e) $2^{x}7^{x} = 14^{3x+2}$

f) $\left(\sqrt[6]{32^{x+2}}\right)^{5} = \sqrt[3]{2}$

g) $\sqrt{3^{x}} = \sqrt[5]{81}$

h) $\left(\frac{1}{32}\right)^{x} = 64^{2x-1}$

i) $3^{x} - 5^{x} = 0$

2. Para as funções a seguir, determine os conjuntos domínio e imagem e, esboce o gráfico.

a) $y = 2^{2x}$

b) $y = 2^{-2x}$

c) $y = 3 - 2^{2x}$

d) $y = \left(\frac{2}{3}\right)^{x}$

e) $y = 3 + 2^{2x}$

f) $y = 2^{2x+3}$

g) $y = 1 + e^{x}$

h) $y = e^{2+x}$

i) $y = 1 - e^{-x}$

j) $y = 2^{-\frac{x^2}{2}}$

k) $y = 1 + 2^{-\frac{x^2}{2}}$

l) $y = 2^{-x^2+x+2}$

3. A que taxa anual deve crescer exponencialmente uma população para que dobre após 15 anos?

4. O número de estudantes de uma instituição no mercado é hoje igual a 450 alunos e deve crescer exponencialmente à taxa de 10% ao ano. Quantos alunos essa instituição terá daqui a 10 anos?

5. Uma empresa expande suas vendas exponencialmente em 12% ao ano. Se, no ano passado, ela vendeu 1.100 unidades, quantas unidades venderá daqui a 4 anos?

6. Um automóvel vale hoje R$ 25.000,00 e a cada ano sofre uma depreciação de 4%.
   a) Qual o seu valor daqui a 7 anos? (depreciação exponencial)
   b) Qual o seu valor daqui a 7 anos? (depreciação juro composto)

7. Pedro, no dia do nascimento do filho, prometeu, a cada aniversário da criança, plantar 2^n árvores (n, número natural, representa a idade do filho). Passados 5 anos, quantas árvores foram plantadas por Pedro, ao total, considerando que ele cumpriu sua promessa em todos os anos?

8. Um carro 0 km deprecia exponencialmente a uma taxa de 20% no primeiro ano e 15% no segundo ano. Caso você compre um carro com 2 anos de uso e pague R$ 21.500,00, qual o preço do mesmo carro 0 km?

9. (UMC-SP) O número N de decibéis e a potência I de um som medida em watts por centímetros quadrados estão relacionados pela fórmula $I = 10^{-16} \cdot 10^{\frac{N}{10}}$. Determine o número de decibéis correspondente ao som provocado por tráfego pesado de veículos, cuja potência é estimada em 10^{-8} watts por centímetros quadrados.

10. O número de bactérias em uma cultura é dado pela fórmula $Q(t) = 153 \cdot 5^{\frac{t}{3}}$, sendo que *t* é medido em dias. Nessas condições, estime a população inicial e a população após 12 dias.

11. A população de um tipo de anfíbio, criado em lago, é dada pela fórmula $N(t) = \dfrac{7\,300}{2 + 5e^{-0{,}035\,t}}$, sendo que t é medido em anos. Estime a população inicial e a população daqui a 7 anos.

12. Quanto dinheiro devo dispor, hoje, a 6% a.t. capitalizados trimestralmente, de modo que o saldo seja de R$ 5.000,00 após 3 anos?

13. A lei de resfriamento de Newton estabelece que a temperatura T de um corpo inicialmente a uma temperatura $T_{i,}$ colocado em um meio a uma temperatura menor T_c, é dada pela fórmula $T = T_c + (T_i - T_c)e^{-0{,}0558\,t}$ e t é dado em minutos. Se uma xícara de café, a 80° às 9h00min da manhã, é levada a um ambiente cujo ar está a 32º e resfria para 68,3° às 9h05min da manhã, encontre a sua temperatura às 9h10min da manhã.

10

Função Logarítmica

LOGARITMO

Sendo **a** e **b** números reais tais que $a>0$, $b>0$ e $b\neq 1$, chamamos de logaritmo de **a** na base **b** o expoente real **x** ao qual se eleva a base **b** para obter **a**.

$$\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a\text{, com } a>0,\ b>0 \text{ e } b\neq 1$$

Em que: **a** é dito "logaritmando", **b** é dito "base" e **x** é dito "logaritmo".

As condições de existência para a base são necessárias para que b^x tenha significado para todo $x \in \mathbb{R}$.

Segue diretamente da definição:

- $\log_b 1 = 0$,
- $\log_b b = 1$,
- $\log_b b^m = m$.

PROPRIEDADES DOS LOGARITMOS

Sendo **a, b, c** e **m** números reais positivos e $a \neq 1$, e estando os logaritmos na mesma base, são válidas as propriedades a seguir.

a) $\log_a (b\cdot c) = \log_a b + \log_a c$

b) $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$

c) $\log_a b^m = m \cdot \log_a b$

d) $\log_a b = \log_a c \Rightarrow b = c$

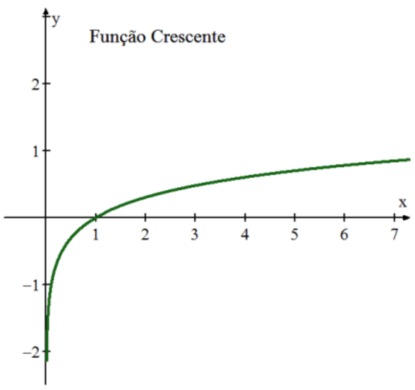
MUDANÇA DE BASE

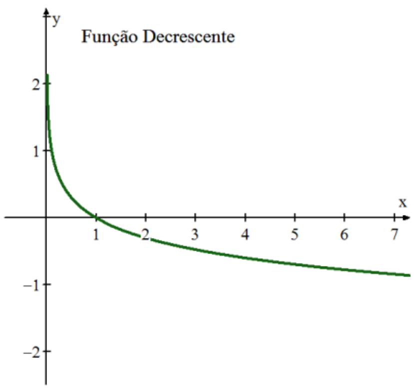
Sendo **a, b e c** números reais positivos, $b \neq 1$ e $c \neq 1$, temos $\log_b a = \dfrac{\log_c a}{\log_c b}$. Assim, por exemplo, $\log_4 7 = \dfrac{\log_{10} 7}{\log_{10} 4} = \dfrac{\log\ 7}{\log\ 4} = 1{,}4036$.

FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Chamamos *função logarítmica* à função: g: $\mathbb{R}^*_+ \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \log_a x$, em que g(x) é o logaritmo, x o logaritmando e *a* a base. Uma função logarítmica desse tipo existe se: $a > 0$ e $a \neq 1$ e $x > 0$.

- crescente, para $a > 1$
- decrescente, para $0 < a < 1$





Observações:

- domínio de uma função $g(x) = \log_a x$ é $\mathbb{R}^*_+$, ou seja, somente os números positivos possuem logaritmo. Se a função sofrer qualquer modificação, seu domínio será alterado. Por exemplo a função $p(x) = \log_2(x+3)$ tem como conjunto domínio valores de x tais que $x + 3 > 0$, ou seja, o intervalo $]-3, +\infty[$.

- O conjunto imagem da função é $\mathbb{R}$, isto é, qualquer número real é logaritmo de algum número real positivo em uma certa base.

- O gráfico da função fica todo à direita do eixo y, com exceção dos casos em que a função sofreu algum deslocamento horizontal.

- Se $x = 1 \Rightarrow y = \log_a 1 = 0$, pois $a^0 = 1$, ou seja, o ponto P(1,0) pertence ao gráfico da função $g(x) = \log_a x$.

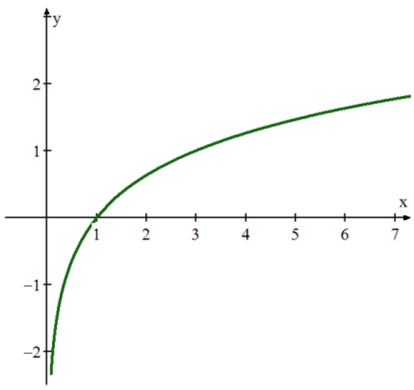
- Quando a base não estiver escrita, subentendemos que a base é 10, ou seja, $\log_{10} x$ é o mesmo que logx.

Exemplo 10.1

Construir o gráfico das funções a seguir.

a) $f(x) = \log_3 x$

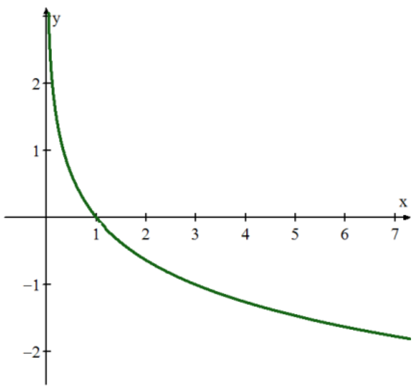
x	f(x)
$\frac{1}{9}$	-2
$\frac{1}{3}$	-1
1	0
3	1
9	2



A função $f(x) = \log_3 x$ é uma função crescente e apresenta $Im(f) = \mathbb{R}$, e $D(f) = \mathbb{R}^*_+$

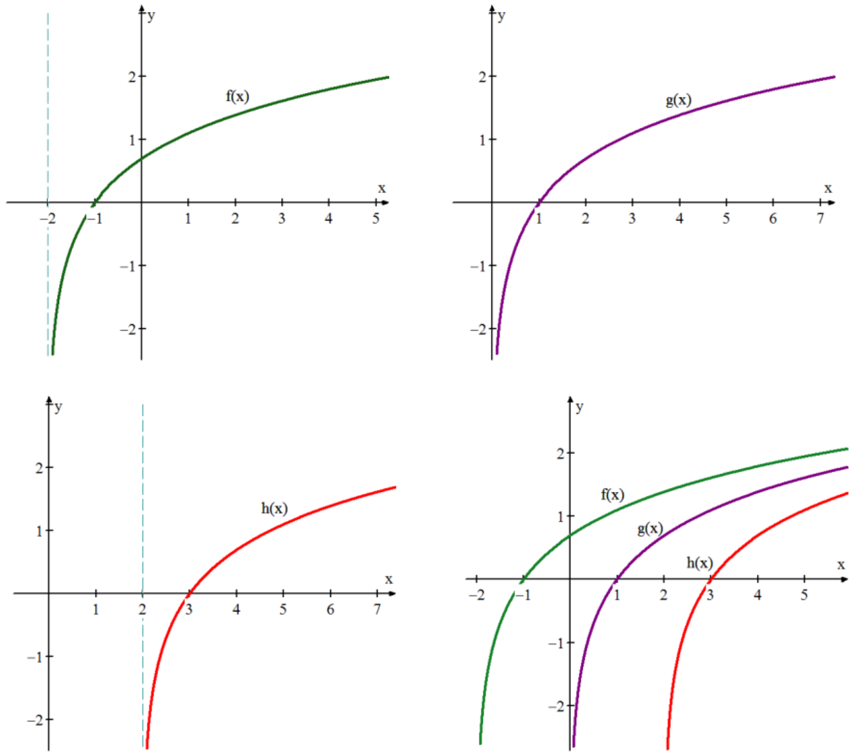
b) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

x	f(x)
9	-2
3	-1
1	0
$\frac{1}{3}$	1
$\frac{1}{9}$	3



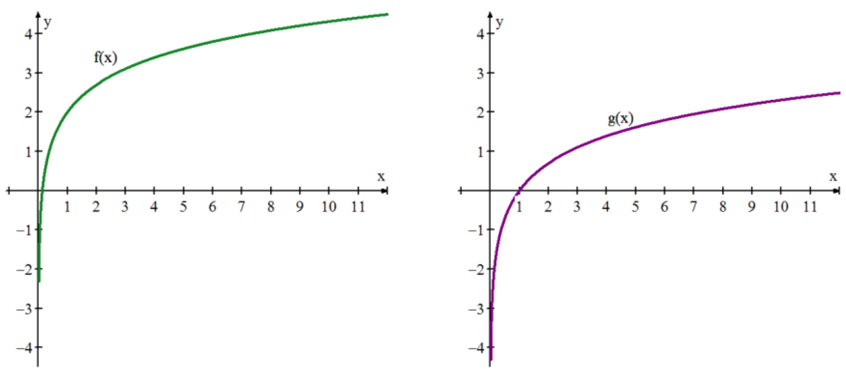
A função $f(x)=\log_{\frac{1}{3}} x$ é uma função decrescente e apresenta como $Im(f)=\mathbb{R}$, e $D(f)=\mathbb{R}^*_+$

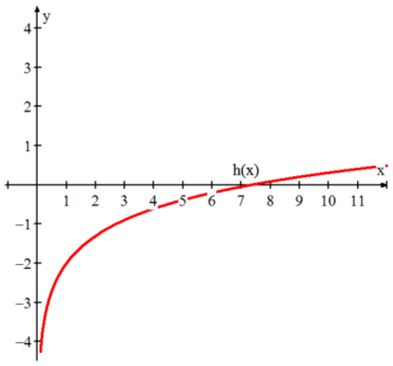
c) $f(x)=\ln(x+2)$; $g(x)=\ln x$; $h(x)=\ln(x-2)$.

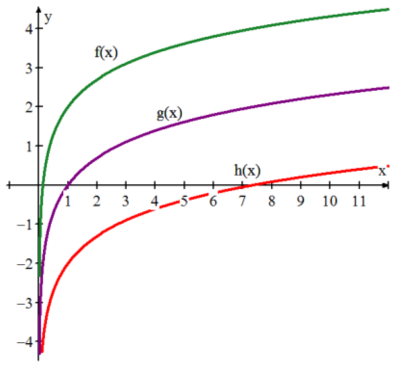


As funções $f(x)=\ln(x+2)$, $g(x)=\ln x$ e $h(x)=\ln(x-2)$ são funções crescentes que apresentam $Im(f)=\mathbb{R}$, e $D(f)=(-2,\infty)$, $D(g)=(0,\infty)$ e $D(h)=(2,\infty)$, respectivamente.

d) $f(x)=\ln(x)+2$; $g(x)=\ln x$; $h(x)=\ln(x)-2$.



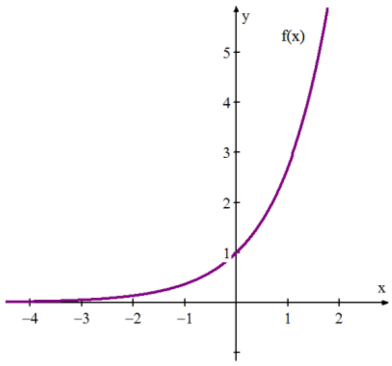


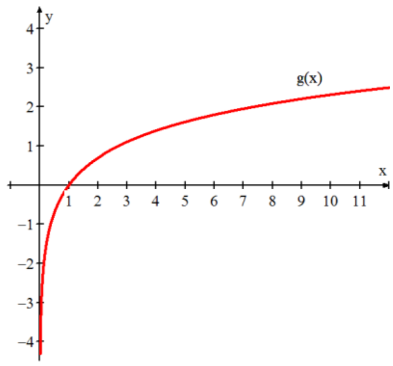


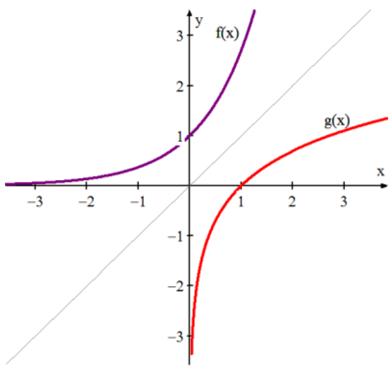
As funções $f(x) = \ln(x) + 2$, $g(x) = \ln x$, e $h(x) = \ln(x) - 2$ são funções crescentes que apresentam $Im(f) = \mathbb{R}$ e $D = (0, \infty)$.

Exemplo 10.2

Construir o gráfico das funções $g(x) = \ln x$ e $f(x) = e^x$, e observar que são funções inversas.







EQUAÇÕES LOGARÍTMICAS

Toda a equação cuja incógnita se apresenta no logaritmando ou na base de um logaritmo é dita equação logarítmica, como, por exemplo:

a) $\log_x (3x+25)=2$

b) $3\log_2 x^5 = 24+\log_2 x^3$

c) $\log_3 x+\log_3 2x+\log_3 5x=8$

Exemplo 10.3

Resolva em $\mathbb{R}$ as equações:

a) $\log_x (3x+25)=2$

Resolução

Aplicando a definição de logaritmo temos:

$$x^2 = 3x+25$$
$$x^2 - 3x - 25 = 0$$

Essa equação apresenta como solução $x_1 = 6{,}72015$ e $x_2 = -3{,}72015$. Entretanto, o valor $-3{,}72015$ não serve como solução dessa equação logarítmica, pois não existe logaritmo com base negativa.

Logo, $S=\{6{,}72015\}$.

b) $3\log_2 x^5 = 24+\log_2 x^3$

Resolução

Devemos reduzir a equação a um único logaritmo (é necessário bases iguais).

$$3\log_2 x^5 - \log_2 x^3 = 24$$
$$15\log_2 x - 3\log_2 x = 24$$
$$12\log_2 x = 24$$
$$\log_2 x = \frac{24}{12}$$
$$\log_2 x = 2$$
$$2^2 = x$$
$$x = 4$$

Observando as condições de existência, a solução é válida.
Logo, S= $\{4\}$

c) $\log_3 x + \log_3 2x + \log_3 5x = 8$

Resolução

$$\log_3(x \cdot 2x \cdot 5x) = 8$$
$$\log_3(10x^3) = 8$$
$$3^8 = 10x^3$$
$$6561 = 10x^3$$
$$x^3 = \frac{6561}{10}$$
$$x^3 = 656{,}1$$
$$x = \sqrt[3]{656{,}1}$$
$$x \approx 8{,}68940$$

Observando as condições de existência, a solução é válida.
Logo, S= $\{8{,}69\}$.

Exemplo 10.4

Daqui a *t* anos o valor de um equipamento eletrônico será de $v = 45000(0{,}8)^t$ reais. Pergunta-se:

a) qual o valor inicial deste equipamento?

b) qual o valor daqui a 5 anos?

c) daqui a quanto tempo seu valor se reduzirá à metade?

Resolução

a) Para calcular o valor inicial da máquina, utilizamos t=0 na equação.

$$v = 45000(0{,}8)^t$$
$$v = 45000(0{,}8)^0$$

Assim: $v = 45000 \cdot 1$

$$v = 45000$$

O valor inicial do equipamento é R$ 45.000,00

b) Após 5 anos, $t=5$:

$$v = 45000(0,8)^t$$
$$v = 45000(0,8)^5$$
$$v = 45000 \cdot 0,32768$$
$$v = 14745,60$$

O valor do equipamento após 5 anos será R$ 14.745,60

c) Metade do valor igual R$ 22.500,00

$$v = 45000(0,8)^t$$
$$22500 = 45000(0,8)^t$$
$$0,8^t = \frac{22500}{45000}$$

Aplicando logaritmo na equação, temos:

$$0,8^t = 0,5$$
$$\log 0,8^t = \log 0,5$$
$$t \cdot \log 0,8 = \log 0,5$$
$$t = \frac{\log 0,5}{\log 0,8}$$
$$t = 3,1063$$

Daqui a 3 anos e 1 mês aproximadamente.

Ou, se não conhecemos o valor inicial, podemos fazer a seguinte relação:

$$\frac{1}{2}v = v(0.8)t$$
$$0,5 = 0,8^t$$
$$\log 0,5 = \log 0,8^t$$
$$\frac{\log 0,5}{\log 0,8} = t$$
$$t = 3,1063$$

Exemplo 10.5

Uma certa aplicação financeira é atualizada segundo a seguinte lei: $M(t) = C \cdot (1{,}015)^t$, em que t é o número de meses, C é o dinheiro aplicado e M, o montante.

a) Ache M, quando C = R$ 1.362,00 em 3 meses.

b) Ache o menor número de meses tal que M(t) atinja três vezes o capital aplicado.

Resolução

a)

$$M(t) = C \cdot (1{,}014)^t$$
$$M(3) = 1362 \cdot (1{,}015)^3$$
$$M(3) = 1424{,}21$$

Após 3 meses o montante será R$ 1.424,21

b)

$$M(t) = C \cdot (1{,}015)^t$$
$$3 \cdot C = C \cdot (1{,}015)^t$$
$$3 = (1{,}015)^t$$

Aplicando logaritmo na equação, temos:

$$\log 3 = \log (1{,}015)^t$$
$$\log 3 = t \cdot \log (1{,}015)$$
$$\frac{\log 3}{\log 1{,}015} = t$$
$$t \approx 73{,}79 \quad \text{meses}$$

A quantia triplicará após 74 meses.

Exercícios – Capítulo 10

1. Calcule, com o auxílio da calculadora:

a) $\log_3 728{,}73$

b) $\ln(224)^{87}$

c) $\log 54 \cdot \log 0{,}53$

d) $\log_8\left(\dfrac{125}{2584}\right)$

e) $3\log_5 \sqrt{17{,}8}$

f) $\ln(387{,}5)^{25}$

g) $\log_3 5 \cdot \log_{25} 81$

h) $\log_2(\log_3 81)$

i) $\log_5 \sqrt[4]{1536}$

j) $\log(3389)^{128}$

k) $\ln\left(\dfrac{3{,}6}{2{,}56}\right)$

2. Resolva as equações em $\mathbb{R}$.

a) $\log_2(2x+3) = \log_2 x^2$

b) $\log(x^2 - 3) = 0$

c) $\log_2 x + \log_2(2x) + \log_2(4x) = 6$

d) $\log_3(x-2) - \log_9(x-4) = 1$

e) $2\log x = \log 4 + \log(3x)$

f) $\log_{(x-1)} 3 = 2$

g) $17^{(x-3)} = 32$

h) $5^x = e$

i) $7^x = 13$

j) $2^{(3x+1)} = 4^x \cdot \log_4 256$

3. Construir o gráfico das funções abaixo, determinando os conjuntos domínio e imagem.

a) $f(x)=\log_3(5x)$

b) $f(x)=\log(x+3)$

c) $f(x)=\log(x)+3$

d) $f(x)=3\log_2 x$

e) $f(x)=\log(x^2-4)$

f) $f(x)=\log(x)-3$

4. Quanto à função $f(x)=\log_6(x-4)$, é incorreto afirmar que:

a) é decrescente em todo o seu domínio.

b) $x=0$ pertence ao seu domínio.

c) sua imagem é o conjunto $\mathbb{R}$.

d) seu domínio é o conjunto $]4,+\infty[$.

e) é crescente em todo o seu domínio.

5. Dadas as funções $f(x)=3^x$ e $g(x)=\log_2 x$, determine o valor de $\dfrac{f(4)+g(4)}{2\cdot g(8)}$.

6. Uma certa aplicação financeira é atualizada segundo a seguinte lei: $M(t)=C\cdot(1{,}02)^t$, em que t é o número de meses, *C* é o dinheiro aplicado e M, o montante.

a) Ache M quando C = R\$ 1.380,00 e t = 3.

b) Ache o menor número de meses tal que M(t) atinja o valor 2C.

7. [8]A altura percebida β de um som em decibéis (dB) está relacionada com a sua intensidade I em watts/metro quadrado (w/m^2) pela equação $\beta=10\log\left(\dfrac{I}{I_0}\right)$ em que $I_0=10^{-12}\ w/m^2$. Os danos ao ouvido

[8] *Cálculo: um novo horizonte* de Howard Anton, pág 245.

médio ocorrem a partir de 90 dB ou mais. Ache o nível de decibel de cada um dos seguintes sons e estabeleça se causará dano à audição.

Som	I
(a) Avião a jato (a 150 m de distância)	1.0×10^2 W/m^2
(b) Música de rock amplificada	1.0 W/m^2
(c) Liquidificador	1.0×10^{-4} W/m^2
(d) TV volume médio (a 3 metros de distância)	$3{,}2 \times 10^{-5}$ W/m^2

8. A fórmula $M = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{10^{4,4}}\right)$ representa a magnitude de um terremoto na escala Richter, em que E é a energia liberada pelo terremoto (em joules). Determine:

a) a magnitude atingida na escala Richter por um terremoto que liberou aproximadamente $6{,}75 \times 10^{15}$ joules de energia.

b) quanta energia foi liberada por um terremoto que atingiu 8,3 na escala Richter.

9. A fórmula $Q = Q_0 e^{kt}$ representa a quantidade de uma substância em gramas, em que **k** representa a taxa e **t**, o tempo em anos. Em quantos anos 28 g de uma substância radioativa que se desintegra a uma taxa de 7,32% ao ano se reduzirá a 2,4 g?

10. A taxa de crescimento exponencial de um determinado tipo de bactéria numa cultura é de 2,9% por minuto. Nessas condições, em quantos minutos o número de bactérias passará de 3500 para 7832?

11. [9]Quando os professores selecionam textos para seus cursos, eles normalmente escolhem entre os livros que já estão na sua estante. Por essa razão, a maioria dos editores envia exemplares de novos livros aos professores que lecionam disciplinas correlatas. O editor de matemática em uma grande editora estima que, se x mil exemplares de cortesia forem distribuídos, as vendas no primeiro ano de um novo livro serão de aproximadamente $f(x) = 20 - 15e^{-0,2x}$ exemplares.

[9] *Cálculo: um curso moderno e suas aplicações,* de Laurence Hoffmann, p. 207.

a) Esboce essa função de vendas.

b) Quantos exemplares o editor pode esperar vender no primeiro ano, se nenhum exemplar de cortesia tiver sido enviado?

c) Quantos exemplares o editor espera vender no primeiro ano, se 10.000 exemplares de cortesia forem enviados?

d) Se a estimativa do editor estiver correta, qual seria a projeção mais otimista para as vendas do livro no primeiro ano?

12. O valor final de uma dívida no decorrer de x meses é dado por $M(x) = 5230 \cdot 1{,}05^{x}$. Após quanto tempo esse valor será de R$ 9.575,00.

13. Supondo que o valor (em reais) de um determinado equipamento seja representado pela função $V = 8532 \cdot 0{,}75^{t}$, em que t é o tempo em anos, após quanto tempo o valor do equipamento será metade do valor inicial?

14. A cidade de Porto Alegre – RS apresentou uma população de 1.360.590 habitantes no censo do ano 2000 (Fonte IBGE). A partir de então, sua população cresceu de forma exponencial a uma taxa de aproximadamente 0,977% ao ano. Supondo que a população continue crescendo a essa taxa,

a) estime a população da cidade para os anos de 2001, 2006 e 2010.

b) em que ano a população será de aproximadamente 1.575,300 habitantes?

c) após quanto tempo a população duplicará?

15. O número total de cachorros-quentes vendidos por uma pequena rede de *fast-food* está crescendo exponencialmente. Se 1,2 milhões foram vendidos em 1999 e 3,6 milhões em 2004, qual a projeção de vendas em 2005?

16. [10]A produtividade diária de um empregado que está no trabalho por *t* semanas é dada por uma função da forma $Q(t) = 40 - Ae^{-kt}$. Inicialmente, o trabalhador poderia produzir 20 unidades por dia, e após 1 semana, o trabalhador poderia produzir 30 unidades diárias. Quantas unidades o trabalhador produzirá por dia após 3 semanas?

---

[10] *Cálculo: um curso moderno e suas aplicações*, de Laurence Hoffmann, p. 207.

Funções Modulares, Polinomiais, Várias Sentenças e Trigonométricas

11

FUNÇÃO MODULAR

Uma função modular é qualquer função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que a cada x associa $|x|$:

$$f(x) = |x| \quad \text{em que} \quad |x| = \begin{cases} x, \text{se } x \geq 0 \\ -x, \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

Observação:

Os gráficos de muitas funções podem ser considerados originados de gráficos mais básicos, como resultado de uma ou mais transformações elementares. As transformações elementares aqui consideradas são:

- Translação Vertical – O gráfico de $y = f(x) + k$, para $k > 0$, é o mesmo que $y = f(x)$ transladado para cima k unidades. O gráfico $y = f(x) + k$, para $k < 0$, é transladado para baixo k unidades.
- Translação Horizontal – O gráfico de $y = f(x + h)$, para $h > 0$, é o mesmo que $y = f(x)$ transladado à esquerda h unidades. O gráfico $y = f(x + h)$, para $h < 0$, é transladado a direita h unidades.

Exemplo 11.1

Represente graficamente as funções:

a) $f(x) = |x|$

Apresenta $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}_+$.

x	f(x)
–2	2
–1	1
0	0
1	1
2	2

b) $g(x) = |x + 1|$.

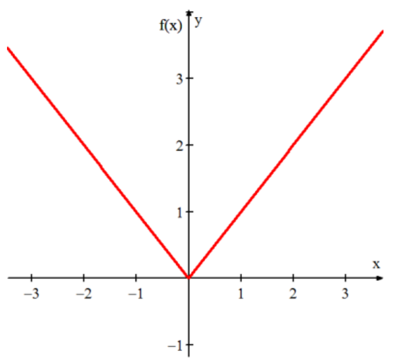
O gráfico dessa função é o mesmo de $f(x) = |x|$, transladado uma unidade para esquerda no eixo das abscissas (X). Apresenta $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}_+$.

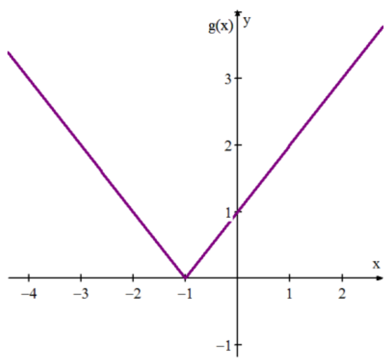
c) $h(x) = |x| + 2$

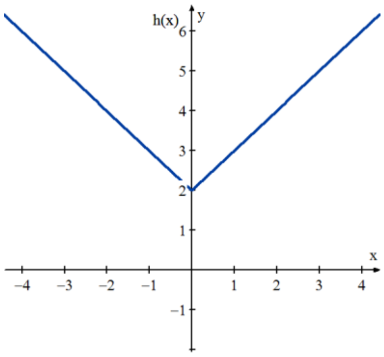
O gráfico dessa função é o mesmo de $f(x) = |x|$, transladado uma unidade para cima no eixo das ordenadas (Y) e apresenta modificação na imagem $Im(f) = [2, \infty)$.

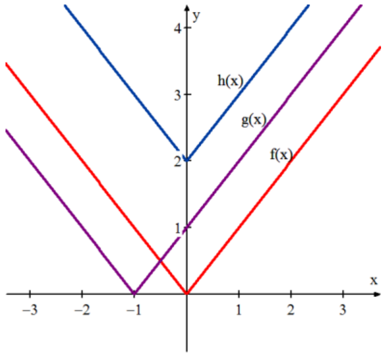
d) $i(x) = |x^2 - 4x + 3|$

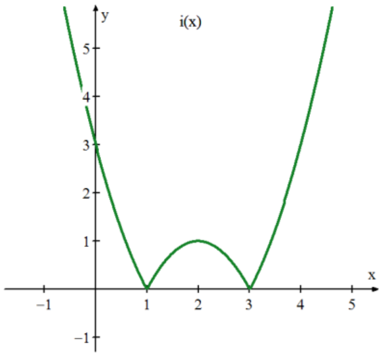
Apresenta $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}_+$.











Observe, no gráfico acima, a comparação das funções h(x), g(x) e f(x).

FUNÇÃO POLINOMIAL

Uma função polinomial é qualquer função apresentada como $f(x): x \rightarrow a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0$, sendo $a_n \neq 0$, em que *n* é o grau da função polinomial. Caso a função polinomial apresente grau *n,* e todos os coeficientes, exceto a_n, são zero, então essa função é chamada de **função potência** e seu domínio depende de *n*.

A seguir, será apresentada uma relação de funções polinomiais.

Grau	Função	Nome	Gráfico
$n=0$	$f(x)=a_0$	Função constante	Reta horizontal $D(f) = \mathbb{R}$
$n=1$	$f(x)=a_1x$ $f(x)=a_1x+a_0$	Função do 1º grau	Reta com coeficiente angular a_1 $D(f) = \mathbb{R}$
$n=2$	$f(x)=a_2x^2+a_1x+a_0$	Função quadrática	Parábola $D(f) = \mathbb{R}$
$n \geq 2$ e par	$f(x)=a_0x^2$ $f(x)=a_0x^4$ $f(x)=a_0x^6$	Função potência (par)	Parábola, com vértice na origem $D(f) = \mathbb{R}$

$n \geq 3$ e ímpar	$f(x) = a_0x^3$ $f(x) = a_0x^7$ $f(x) = a_0x^9$	Função potência (ímpar)	Curva $D(f) = \mathbb{R}$
$n \leq -2$ e par	$f(x) = a_0x^{-2}$ $f(x) = a_0x^{-4}$ $f(x) = a_0x^{-6}$	Função potência (par)	Curva $D(f) = \mathbb{R}^*$
$n \leq -1$ e ímpar	$f(x) = a_0x^{-3}$ $f(x) = a_0x^{-7}$ $f(x) = a_0x^{-9}$	Função potência (ímpar)	Curva $D(f) = \mathbb{R}^*$

A função potência também pode apresentar expoente racional da forma $\frac{m}{n}, n > 1$. Temos dois casos distintos a considerar:

$\frac{m}{n}$, com *n* natural	$f(x) = a_0x^{1/2}$ $f(x) = a_0x^{2/3}$	Função potência (raiz)	Curva *n* par: $D(f) = \mathbb{R}_+$ *n* ímpar: $D(f) = \mathbb{R}$
$-\frac{m}{n}$, com *n* natural	$f(x) = a_0x^{-1/2}$ $f(x) = a_0x^{-2/3}$	Função potência (raiz)	Curva *n* par: $D(f) = \mathbb{R}_+$ *n* ímpar: $D(f) = \mathbb{R}^*$

Toda a função que pode ser escrita na forma $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$, em que *P* e *Q* são polinômios, é chamada de função racional e apresenta como domínio da função $D(f) = \{x \in \mathbb{R} / Q(x) \neq 0\}$; sua representação gráfica será uma curva.

Como exemplo, citamos as funções: $f(x) = \frac{x-1}{x+5}$ e $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 4}$.

Exemplo 11.2

Represente graficamente as funções:

a) $f(x) = x^4$

Apresenta $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}_+$.

b) $f(x) = (x-1)^4$

O gráfico dessa função é o mesmo de $f(x) = x^4$, transladado uma unidade para a direita. Apresenta $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}_+$.

c) $f(x) = x^3$

Apresenta D(f) = $\mathbb{R}$ e Im(f) = $\mathbb{R}$.

d) $f(x) = (2x+5)^3$

O gráfico dessa função é o mesmo de $f(x) = x^3$, dilatado por um fator 2 em relação ao eixo das ordenadas (Y) e transladado $\frac{5}{2}$ unidades para a esquerda. Apresenta D(f) = $\mathbb{R}$ e Im(f) = $\mathbb{R}$.

e) $f(x) = x^{-3}$

Sabendo que essa função não está definida no ponto x=0, sua representação gráfica dá-se em dois ramos: à esquerda e à direita desse ponto. Apresenta D(f) = $\mathbb{R}^*$ e Im(f) = $\mathbb{R}^*$.

f) $f(x) = (x-1)^{-3}$

O gráfico dessa função é o mesmo de $f(x) = x^{-3}$, transladado uma unidade para a direita. Apresenta D(f) = $\mathbb{R}-\{1\}$ e Im(f) = $\mathbb{R}^*$.

g) $f(x) = (x)^{-2}$

Assim como na função do item (e), essa função não está definida no ponto x = 0. Apresenta D(f) = $\mathbb{R}^*$ e Im(f) $= (0, \infty)$.

h) $f(x) = (x-1)^{-2} + 2$

O gráfico dessa função é o mesmo de $f(x) = (x)^{-2}$, transladado uma unidade para a direita e duas unidades para cima. Apresenta D(f) = $\mathbb{R}-\{1\}$ e Im(f) = $[2, \infty)$.

i) $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$

Apresenta D(f) = $\mathbb{R}_+$ e Im(f) = $[0, \infty)$

j) $f(x) = \sqrt{x+2}$

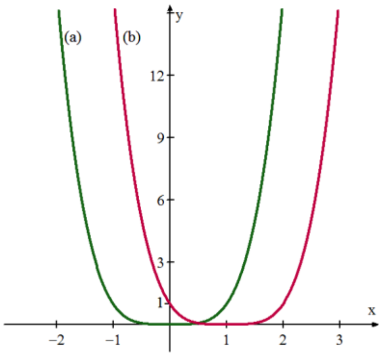
O gráfico dessa função é o mesmo de $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$, transladado duas unidades para a esquerda. Apresenta D(f) = $[-2, \infty)$ e Im(f) = $\mathbb{R}_+$.

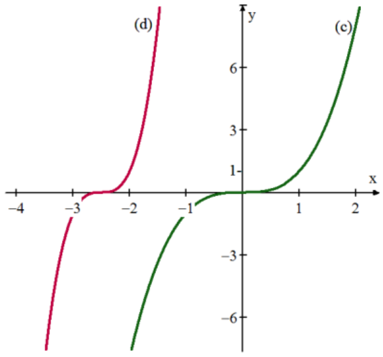
k) $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$

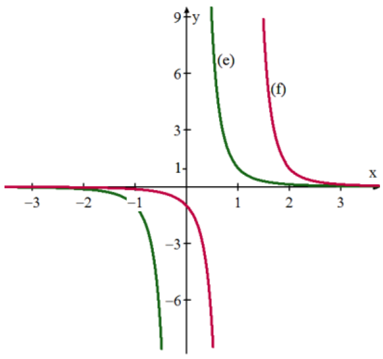
Apresenta $D(f) = R_+^*$ e $Im(f) = R_+^*$.

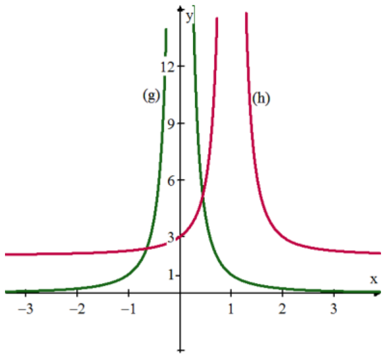
l) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+5}$

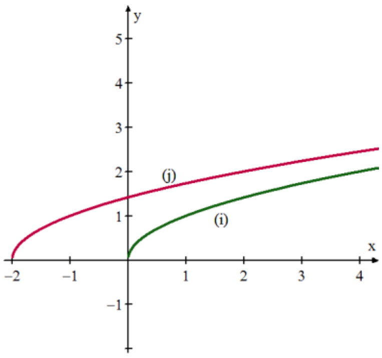
Essa função não está definida no ponto x=–5, logo, sua representação gráfica também se dá em dois ramos desse ponto. Apresenta D(f) = $\mathbb{R}$–{–5} e Im(f)= $\mathbb{R}$–{1}.

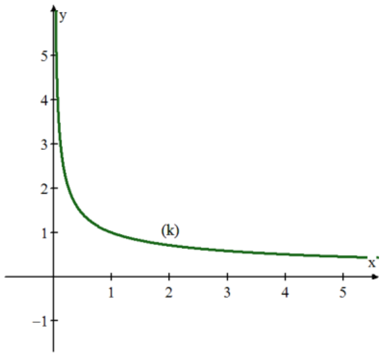


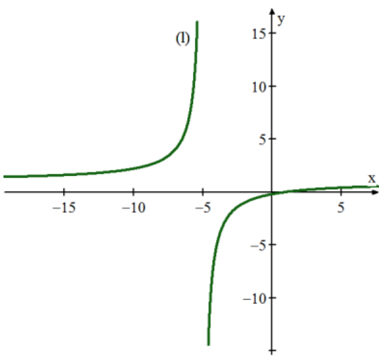












FUNÇÃO DEFINIDA POR VÁRIAS SENTENÇAS

Algumas funções podem aparecer definidas por mais de uma sentença, podendo apresentar descontinuidade no seu domínio.

Exemplo 11.3

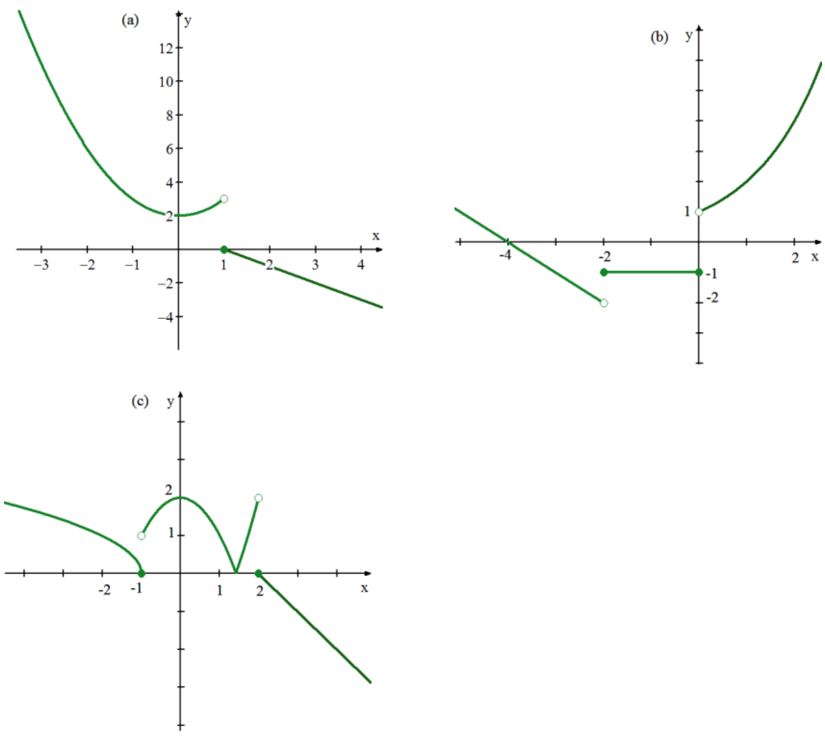
Represente graficamente as funções e indique seu conjunto domínio e imagem.

a) $f(x)=\begin{cases} -x+1, & \text{se } x\geq 1 \\ x^2+2, & \text{se } x<1 \end{cases}$, apresenta $D(f)=\mathbb{R}$ e $Im(f)=(-\infty,0]\cup[2,\infty)$.

b) $f(x)=\begin{cases} 2^x, & \text{se } x>0 \\ -1, & \text{se } -2\leq x\leq 0 \\ -x-4, & \text{se } x<-2 \end{cases}$, apresenta $D(f)=\mathbb{R}$ e $Im(f)=(-2,\infty)$.

c) $f(x)=\begin{cases} -x+2, & \text{se } x\geq 2 \\ |-x^2+2|, & \text{se } -1<x<2 \\ \sqrt{-x-1}, & \text{se } x\leq -1 \end{cases}$, apresenta $D(f)=\mathbb{R}$ e $Im(f)=(-\infty,-1]\cup[0,\infty)$.

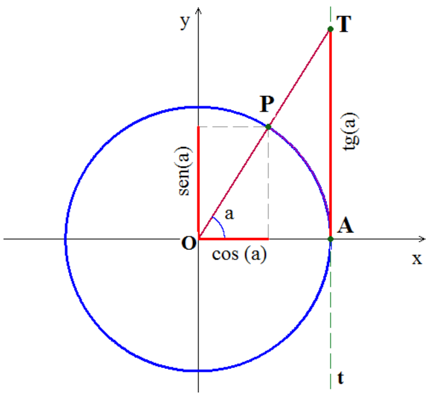
Usaremos a notação vista no capítulo 5 para intervalos abertos e fechados.



FUNÇÃO TRIGONOMÉTRICA OU CIRCULAR

Antes de falar de uma função trigonométrica, faz-se necessário alguns "lembretes":

- a medida do comprimento de um arco de circunferência de raio unitário é 2π e as unidades mais usadas são o grau e o radiano. Para nosso estudo, usaremos radiano;
- dado um arco trigonométrico AP de medida **a**, chama-se de cosseno de **a** a abscissa do ponto P, e seno de **a** a ordenada do ponto P;
- dado um arco trigonométrico AP de medida **a**, chama-se tangente de **a** (tg **a**) a ordenada do ponto T obtido pela intersecção do prolongamento do raio $\overline{OP}$ com a reta **t**.



Uma função trigonométrica é sempre periódica, portanto, não injetora. Logo, não podemos definir nenhuma função inversa em todo o domínio de uma função trigonométrica básica.

As funções circulares são caracterizadas pelas funções: seno, cosseno, tangente, cossecante, secante e cotangente.

Como exemplos, apresenta-se a relação a seguir:

Função	Domínio	Imagem	Período
$f(x) = \text{sen}x$	$\mathbb{R}$	$[-1,1]$	$P = 2\pi$
$f(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$	$[-1,1]$	$P = 2\pi$
$f(x) = \text{tg}x$	$\{x \in \mathbb{R} / x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$	$P = \pi$
$f(x) = \csc x$	$\{x \in \mathbb{R} / x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R} - (-1,1)$	$P = 2\pi$
$f(x) = \sec x$	$\{x \in \mathbb{R} / x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R} - (-1,1)$	$P = 2\pi$
$f(x) = \text{cot}\,gx$	$\{x \in \mathbb{R} / x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$	$P = \pi$

Observação:

- O período da função $f(x) = sen(kx)$ e $f(x) = cos(kx)$ é dado por $\frac{2\pi}{|k|}, (k \neq 0)$.
- O período da função $f(x) = tg(kx)$ é dado por $\frac{\pi}{|k|}, (k \neq 0)$.

Exemplo 11.4

Represente graficamente as funções:

a) $f(x) = senx$

x	f(x)
$-\frac{\pi}{2} \approx -1{,}57$	-1
0	0
$\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$	1
$\pi \approx 3{,}14$	0
$\frac{3\pi}{2} \approx 4{,}7$	-1
$2\pi \approx 6{,}28$	0

O gráfico dessa função apresenta D(f) $= \mathbb{R}$, Im(f)$=$ $[-1,1]$ e período $P=2\pi$.

b) $y(x) = -2 + senx$

O gráfico dessa função é o mesmo de $f(x) = senx$, transladado duas unidades para baixo. Apresenta D(f) $= \mathbb{R}$, Im(f)$=$ $[-3,-1]$ e período $P=2\pi$.

c) $y(x) = sen(x + \pi)$

O gráfico dessa função é o mesmo de $f(x) = senx$, com defasagem de π radianos.

d) $y(x) = sen\left(\frac{x}{3}\right)$

O gráfico dessa função é análogo ao da função $f(x) = senx$, entretanto, o período foi alterado para $P= 6\pi$.

e) $f(x) = \cos x$

O gráfico dessa função apresenta D(f)=$\mathbb{R}$, Im(f)=[–1,1] e período P=2π.

f) $y = \cos(2x)$

O gráfico dessa função é o mesmo de $f(x) = \cos x$, entretanto, o período foi alterado para $P = \pi$.

g) $f(x) = \operatorname{tg} x$

O gráfico dessa função apresenta D(f) = $\{x \in \mathbb{R} / x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, Im(f)=$\mathbb{R}$ e período P=π.

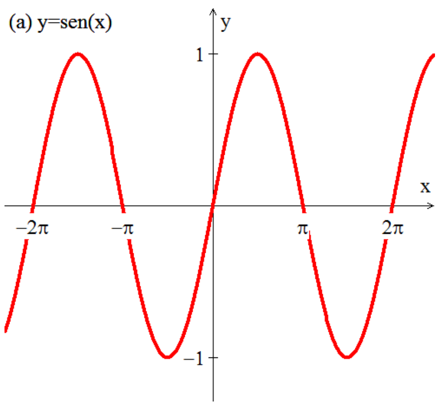
h) $f(x) = \operatorname{tg}(4x)$

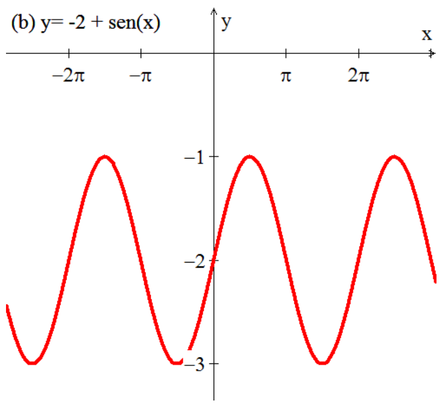
O gráfico dessa função é o mesmo de $f(x) = \operatorname{tg} x$, entretanto, o período foi alterado para P $= \pi/4$ e seu domínio D(f) = $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}\right\}$, com $k \in \mathbb{Z}$.

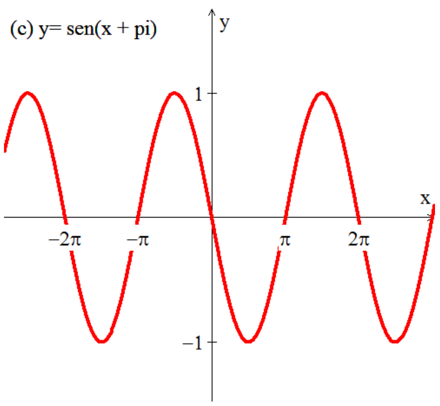
i) $f(x) = \sec x$

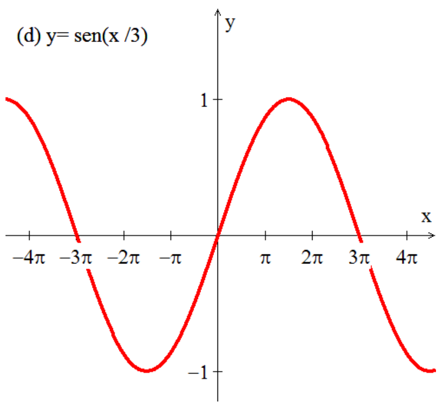
j) $f(x) = \csc x$

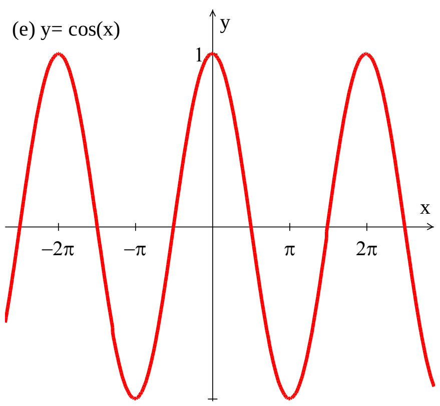
k) $f(x) = \cot g x$

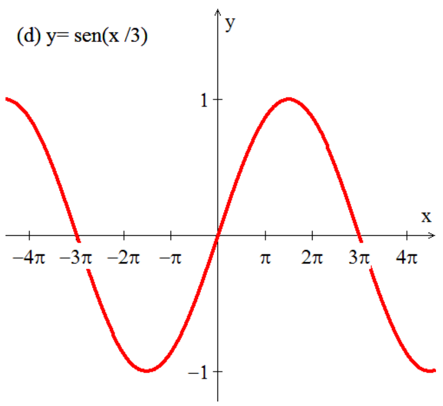


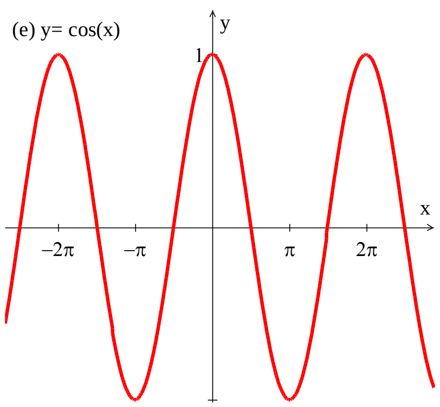


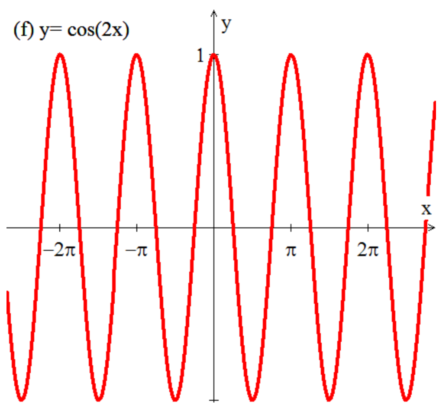

(c) y= sen(x + pi)
y
1
x
−2π
−π
π
2π
−1

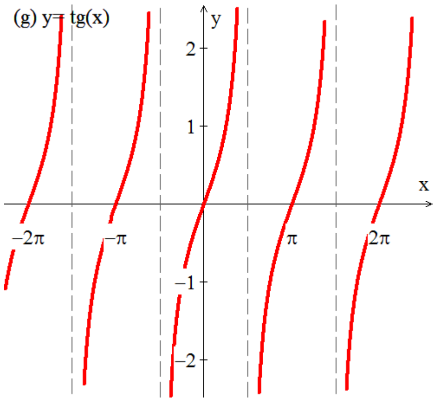

(d) y= sen(x /3)
y
1
x
−4π
−3π
−2π
−π
π
2π
3π
4π
−1

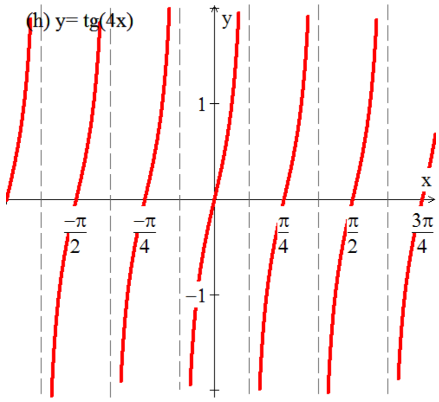

(e) y= cos(x)
y
1
x
−2π
−π
π
2π

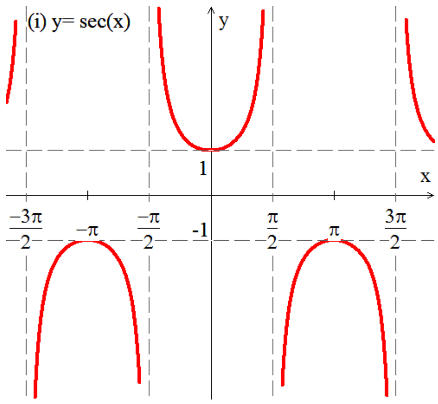

(d) y= sen(x /3)
y
1
x
−4π
−3π
−2π
−π
π
2π
3π
4π
−1

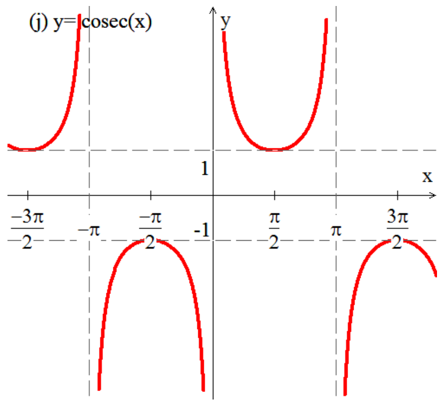

(e) y= cos(x)
y
1
x
−2π
−π
π
2π

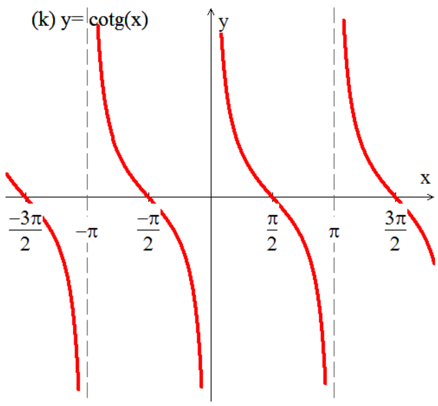

(f) y= cos(2x)
y
1
x
−2π
−π
π
2π


(g) y= tg(x)
y
x
2
1
−1
−2
−2π
−π
π
2π


(h) y= tg(4x)
y
x
1
−1
−π/2
−π/4
π/4
π/2
3π/4


(i) y= sec(x)
y
x
1
-1
−3π/2
−π
−π/2
π/2
π
3π/2


(j) y= cosec(x)
y
x
1
-1
−3π/2
−π
−π/2
π/2
π
3π/2


(k) y= cotg(x)
y
x
−3π/2
−π
−π/2
π/2
π
3π/2

Exercícios – Capítulo 11

1. Esboçar o gráfico, determinar o domínio, e a imagem das seguintes funções:

a) $f(x) = -|x+1|$

b) $f(x) = |x| + 1$

c) $f(x) = |x-2| + 2$

d) $f(x) = |x^2 - 1| + 1$

e) $f(x) = \sqrt{x+1}$

f) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$

g) $f(x) = \sqrt{|x|}$

h) $f(x) = x^2 + 7$

i) $f(x) = x^3 - 1$

j) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$

k) $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$

l) $f(x) = (x+1)^3$

m) $f(x) = \begin{cases} 4, & \text{se } x < -2 \\ |x-1|, & \text{se } -2 \le x \le 2 \\ \sqrt{x-2}, & \text{se } x > 2 \end{cases}$

n) $f(x) = \begin{cases} x-5, & \text{se } x > 2 \\ -\dfrac{2}{x}, & \text{se } -2 \le x \le 2 \\ -x-4, & \text{se } x < -2 \end{cases}$

o) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-5}, & \text{se } x > 5 \\ 5, & \text{se } -2 \le x \le 5 \\ |-x-4|, & \text{se } x < -2 \end{cases}$

2. Esboçar o gráfico, determinar os conjuntos domínio e imagem, e o período das seguintes funções:

a) $y(x) = 2\text{sen}x$

b) $y(x) = \text{sen}\left(\frac{3x}{2}\right)$

c) $y(x) = 1 - \text{sen}x$

d) $y(x) = -\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

e) $y(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

f) $y(x) = -1 + \cos x$

g) $y(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$

h) $y(x) = \text{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$

i) $y(x) = \text{tg}\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$

j) $y(x) = \cos\text{sec}\left(\frac{x}{2}\right)$

k) $y(x) = \sec\left(\frac{x}{2}\right)$

Respostas

CAPÍTULO 1

1.

$\bar{\mathbb{Q}}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}$	$\bar{\mathbb{Q}}$	$\mathbb{N}$

2.

a) $\notin$

b) $\in$

c) $\notin$

d) $\in$

e) $\in$

3.

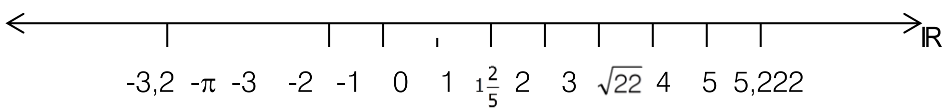
a) Sim

b) Sim

c) Não

d) Sim

4.



5. 24 graduações

6. 27 graduações

7. $-10; -\sqrt{\dfrac{36}{9}} = -2; -1{,}024; -1{,}0124; 0; \pi; \sqrt{42}; {}^{84}\!/_{7} = 12; 112.$

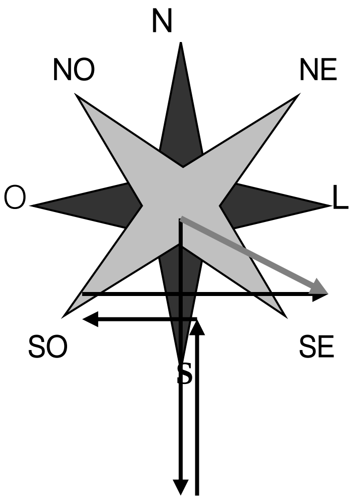
8.

a) -14, 14 e 0.

b) -110, -20, -14 e 0.

c) -110, -20, -14, 0 e 14.

9. $(9, -4)$



4 km para Sul e 9 para Leste $\Rightarrow$ <u>Sudeste</u>

10.

a) $x^2 + 2x + 22$

b) $5x^2 - 8x + 17$

c) $3x^2 + \dfrac{4}{9}x + \dfrac{8}{9}$

11.

a) $\dfrac{1}{3a^2}$

b) $-\dfrac{w^3}{3xa^4}$

c) $\dfrac{a^3}{3(x-y)}$

d) $\dfrac{1}{x+1}$

e) $\dfrac{1}{x-1}$

f) $\dfrac{2x-4}{x+2}$

12.

a) 1

b) 0

c) $\dfrac{23}{70}$

d) $\dfrac{49}{15}$

e) -1/2

f) $\dfrac{-158}{49}$

g) $\dfrac{729}{64}$

13.

a) 10^6

b) 2^{-16}

14.

a) $1{,}087589 \cdot 10^{6}$

b) $1{,}25 \cdot 10^{11}$

c) $1{,}2 \cdot 10^{-9}$

15.

a) $a^{-\frac{28}{3}}$

b) z^{-36}

c) $p^{-\frac{65}{3}}$

16. $\cong 6{,}577$

17.

a) 12,5

b) 7

18.

a) $x^2 + 8x + 15$

b) $x^2 - 8x + 12$

c) $x - 4\sqrt{x} + 3$

d) $x^3 + 2x^2 - 4x - 8$

e) $5x - 4$

f) $a^3 - 125$

g) $6x - 4y + 15ax - 10ay$

19.

a) $\left(x - \frac{3}{12}\right) \cdot \left(x + \frac{3}{12}\right)$

b) $(x + 2\sqrt{2}) \cdot (x - 2\sqrt{2})$

c) $(5r - 9r^3\sqrt{r}) \cdot (5r + 9r^3\sqrt{r})$

d) $(x - 2)^2$

e) $(n - 11) \cdot (n + 11)$

f) $(a + 2)^2$

g) $-2ab^2(ab^3 - 2)$

h) $(x^2 + 1) \cdot (x - 1)$

i) $(x - 12) \cdot (a + b)$

j) $(y^2 - 18y) \cdot (y^2 + 18y)$

k) $(5h + 1)^2$

l) $\left(z - \dfrac{1}{3}\right)\left(z + \dfrac{1}{3}\right)$

CAPÍTULO 2

1. 1440 km.
2. 10 horas.
3. 24 fantasias.
4. 32 carrinhos.
5. 25 caminhões.
6. 6 horas.
7. 35 dias.
8. 64 dias.

9. 15 dias.

10. a) Não b) Sim

11. ≈41 cm.

12. 2,5 cm.

13. a) V b)V c) F d) V e) V f) F

14. R$ 16.560,00.

15. 9%.

16. 13,33%.

17. O preço original seria R$ 60,00 e paguei R$ 51,00.

18. R$ 30,00.

19. 25%.

20. 6 h/d.

21. 45%.

22. 12 horas e 19 minutos.

23. R$ 15,30.

24. 216 gramas.

25. 1,2%.

26. Sim.

27. D

28. A

29. C

30. A

31. B

32. A

33. D

34. B

35. C

36. B

CAPÍTULO 3

1. a) $x^3 - 2$

   b) $\dfrac{x+3}{4}$

   c) $x - 4$

2.
   a) $(1+1+1)! = 6$

   b) $2+2+2=6 \quad \mapsto \quad$ (exemplo)

   c) $3 \cdot 3 - 3 = 6$

   d) $\sqrt{4}+\sqrt{4}+\sqrt{4}=6$

   e) $5 \div 5 + 5 = 6$

   f) $6+6-6=6$

   g) $-7 \div 7 + 7 = 6$

h) $\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{8}=6$

i) $\sqrt{9}\cdot\sqrt{9}-\sqrt{9}=6$

3.

a) $\left\{\frac{21}{5}\right\}$

b) $\left\{\frac{28}{9}\right\}$

c) $\left\{-\frac{3}{5}\right\}$

d) $\left\{\frac{11}{5}\right\}$

e) $\left\{-\frac{47}{21}\right\}$

f) $\{-5{,}368\}$

g) $\{1{,}627\}$

4.

a) $\left\{\frac{7}{3}\right\}$

b) $\{2{,}5\}$

c) $\{\ \}$

5.

a) $\{(5,2)\}$

b) $\left\{\left(\frac{13}{3},\frac{5}{3}\right)\right\}$

c) $\left\{\left(-\frac{92}{3},-\frac{35}{3}\right)\right\}$

d) $\{(10,-10)\}$

e) $\left\{\left(\frac{44}{9},-\frac{4}{3}\right)\right\}$

f) $\left\{\left(\dfrac{16}{7}, \dfrac{8}{7}\right)\right\}$

g) $\left\{\left(\dfrac{107}{35}, \dfrac{347}{35}\right)\right\}$

h) $\{(0{,}03; -4{,}77)\}$

i) $\{(0{,}399; -1{,}42)\}$

6. 17.525 habitantes.

7. R$ 18,60.

8. 227 votos e 380 votos.

9. 50 vacas e 150 cavalos.

10. 30 animais de 2 patas e 30 animais de 4 patas.

11. 13.208 mensagens.

12. calça R$ 11,00 e blusão R$ 18,50.

13. 7 pontos.

14. 1º mês = 281 funcionários; 2º mês = 311 funcionários e 3º mês = 251 funcionários.

15. R$ 171.650,00.

16. 7 arremessos de 3 pontos e 7 arremessos de 2 pontos.

17. Paulo pagou R$ 26,40 e Janaína pagou R$ 13,20.

18. R$ 1.000,00.

19. 6.450 livros.

20. 8,5.

CAPÍTULO 4

1.

a) $\{2, 3\}$

b) $\{5\}$

c) $\{\ \}$

d) $\{0{,}257; -2{,}591\}$

e) $\left\{-1; \frac{1}{2}\right\}$

f) $\{0, 5\}$

g) $\{-3, 3\}$

h) $\left\{-\frac{5}{2}; \frac{5}{2}\right\}$

i) $\{-2, 2\}$

j) $\{0, 17\}$

k) $\{-6, 1\}$

l) $\{-6{,}477; 4{,}477\}$

m) $\{0{,}697; 4{,}303\}$

n) $\left\{5; \frac{1}{3}\right\}$

o) $\{\ \}$

p) $\{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$

q) $\left\{-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right\}$

r) $\{-5{,}702; 0{,}702\}$

s) $\{-4, 4\}$

2.

a. $\left\{(2,2);\left(-\frac{8}{3};-\frac{1}{3}\right)\right\}$

b. $\{(4,2);(-8,-4)\}$

c. $\{(3,4);(4,3)\}$

d. $\{(5,4);(4,5)\}$

e. $\left\{(3,-5);\left(-\frac{10}{3},\frac{9}{2}\right)\right\}$

f. $\{(5,6;0,7)\}$

g. $\left\{\left(-5,-\frac{1}{5}\right);(9,-3)\right\}$

h. $\left\{\left(\frac{5}{2};\frac{1}{2}\right);(1,2)\right\}$

i. $\{(2,3);(3,2)\}$

j. $\{(6,3);(-6,-3)\}$

3. 14 anos.

4. 33 anos.

5. 17 anos e 52 anos.

6. 11 amigos; 8 presentes; R$ 12,10 cada um dos presentes.

7. Comprimento 260 cm e largura 180 cm.

8. 18 meninas e 14 meninos.

9. 45 pacotes.

10. Participaram 40 estudantes e cada um gastou R$ 1.050,00.

11. 3 horas; 60 km/h; 90 km/h.

12. 40 objetos.

13. 72 abelhas.

CAPÍTULO 5

1.
a) $[-11,15]$
b) $\{0,4\}$
c) $(-2,10]$
d) $(10,15]$
e) $(10,15]$

2. V F F F V V V V V

3.
a) $\{1, 3, 5, 8, 9\}$
b) $\{0, 2, 6, 8, 9\}$
c) $\{3, 5, 8, 9\}$
d) $\{1, 3, 5, 7\}$

4.
a) $n(A \cap B) = 15$
b) $n(A \cup B) = 75$
c) $n(A - B) = 25$
d) $n(U) = 90$

5. $(A \cap C) \cup (B \cap C) - (A \cap B \cap C)$

6. $X = \{2, 3\}$ $Y = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

7. 40 casais.

8. 40 entrevistados.

9. 190 indivíduos.

10. 130 funcionários.

11.
a) 14
b) 6
c) 18
d) 20

12.
a) 460 pessoas.
b) 130 pessoas.
c) 410 pessoas.
d) 80 pessoas.

13.
a) 134 alunos.
b) 6 alunos.
c) 154 alunos.
d) 94 alunos.
e) 200 alunos.

14. 5 alunos.

15.
a) 27 pessoas.
b) 62 pessoas.
c) 45 pessoas.

16. 250 pessoas.

17.
a) 460 pessoas.
b) 30 pessoas.

CAPÍTULO 6

1.
a) 12
b) 20
c) $a^2 - 3a + 2$
d) $(a+b)^2 - 3(a+b) + 2$

2.
a) -2
b) $\frac{7}{9}$

3.
a) $-\frac{3}{4}$
b) $-\frac{1}{3}$
c) $\frac{1}{2}$
d) $\frac{1}{3}$
e) $\frac{3}{4}$

4.

a) 0

b) $\nexists$

c) $\sqrt{13,5}$

d) $\dfrac{34}{3}$

e) 51

f) $[3,\infty)$

5.

a) 6

b) $\pm\sqrt{13}$

c) 5

d) 6,96

e) $\mathbb{R}$

6. F V F V V F F

7. b

8. F V F F V V V

9. a

10. b

11. A=15x–4

12. D(f)={1, 2, 3, ...,30}, Im(f)={0, 1}

13. b, c e d

14. $v(x)=9{,}81x$ $v(0)=0\,m/s$ $v(0{,}1)=0{,}981\ m/s$ $v(0{,}2)=1{,}962\ m/s$

15.

a) $\mathbb{R}$.

b) $\mathbb{R} - \{0{,}5\}$.

c) $[1{,}5; \infty)$.

d) $(-5, \infty)$.

e) $(2{,}7]$

f) $\mathbb{R} - \{-1{,}5\}$

g) $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{21}\right\}$

h) $\mathbb{R}$

16.

a) $D(f) = \mathbb{R}$ $\quad Im(f) = \mathbb{R}$

b) $D(f) = [-3, 3]$ $\quad Im(f) = [-3, 3]$

c) $D(f) = [-5, 5)$ $\quad Im(f) = [-3, 2]$

d) Não é função.

e) Não é função.

f) $D(f) = \mathbb{R}$ $\quad Im(f) = [-30, \infty[$

17.

a) N

b) I

c) P

d) P

e) I

f) P

18.

a) N

b) I, S, B

c) N

d) I, S, B

e) I, S, B

f) N

19.

a) $x^2 - x - 2$

b) $x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 9x$

c) $x^2 + 7x + 10$

d) $x^2 + 3x - 2$

e) 54

f) –4

20.

a) $h^{-1}(x) = \dfrac{x+25}{2}$.

b) $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+5}$.

c) $h^{-1}(-1) = 12$.

d) $g^{-1}(7) = \sqrt[3]{12}$.

e) $h(g(x)) = 2x^3 - 35$.

f) $g(g^{-1}(x)) = x$.

g) $g(h^{-1}(x)) = \left(\dfrac{x+25}{2}\right)^3 - 5$.

h) $h(g(3)) = 19$.

i) $h[g^{-1}(-5)] = -25$

CAPÍTULO 7

1.

a) $a = \dfrac{1}{4}$ e $b = -2$ crescente

b) $a = -4$ e $b = 0$ decrescente

c) $a = \dfrac{1}{4}$ e $b = -\dfrac{11}{2}$ crescente

d) $a = -\dfrac{2}{5}$ e $b = \dfrac{1}{8}$ decrescente

2.

a) k>1

b) $k > \dfrac{2}{3}$

c) $k < \dfrac{49}{4}$

d) $k < \sqrt{3}$

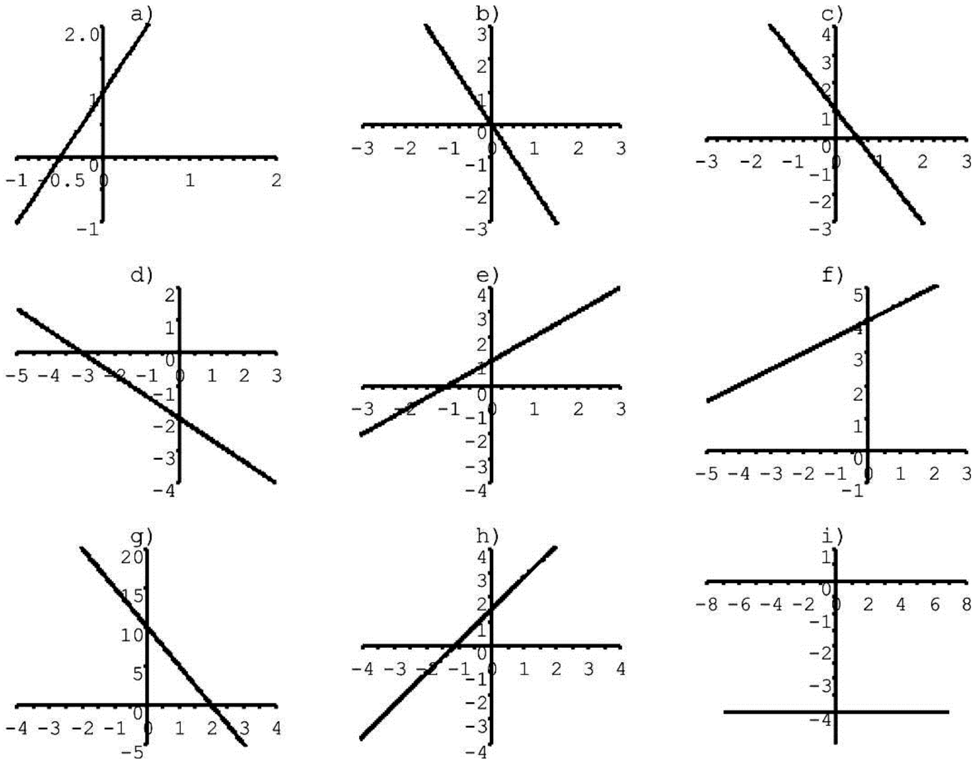
3. Gráficos

D(f) = $\mathbb{R}$ para todas as funções e Im(f) = $\mathbb{R}$ para as funções do item a) ao h). Para o item i), Im(f) = {–4}

Crescentes: a, e, f e h

Decrescentes: b, c, d e g

Constante: i



4.

a) $\begin{cases} y = 0 \Rightarrow \{-0{,}5\} \\ y > 0 \Rightarrow (-0{,}5; \infty) \\ y < 0 \Rightarrow (-\infty; -0{,}5) \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = 0 \Rightarrow \{0\} \\ y > 0 \Rightarrow (-\infty; 0) \\ y < 0 \Rightarrow (0; \infty) \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = 0 \Rightarrow \{0,5\} \\ y > 0 \Rightarrow (-\infty; 0,5) \\ y < 0 \Rightarrow (0,5; \infty) \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = 0 \Rightarrow \{-3\} \\ y > 0 \Rightarrow (-\infty; -3) \\ y < 0 \Rightarrow (-3; \infty) \end{cases}$

e) $\begin{cases} y = 0 \Rightarrow \{-1\} \\ y > 0 \Rightarrow (-1; \infty) \\ y < 0 \Rightarrow (-\infty; -1) \end{cases}$

f) $\begin{cases} y = 0 \Rightarrow \{-8\} \\ y > 0 \Rightarrow (-8; \infty) \\ y < 0 \Rightarrow (-\infty; -8) \end{cases}$

g) $\begin{cases} y = 0 \Rightarrow \{2\} \\ y > 0 \Rightarrow (-\infty; 2) \\ y < 0 \Rightarrow (2; \infty) \end{cases}$

h) $\begin{cases} y = 0 \Rightarrow \{-1,15\} \\ y > 0 \Rightarrow (-1,15; \infty) \\ y < 0 \Rightarrow (-\infty; -1,15) \end{cases}$

i) $y < 0 \Rightarrow \mathbb{R}$

5. V F V F F

6. $y = -4x + 15$

7.
a) p=5
b) p=9

8. 65 ligações.

9. $g(x) = -2x + 4$ e $f(x) = 2x + 4$

10. Terceiro gráfico.

11. b e c.

12. b.

13. $f(x) = -\dfrac{17}{10}x + \dfrac{3}{2}$

14. $\dfrac{11}{2}$

15. Menor.

16. $p(x) = 3x + 3$

17. $C(x) = 220x + 16000$ e R$ 33.600

18.
   a) $R(x) = 18{,}70x$
   b) Sim.
   c) Sim.

19.
   a) $C(v) = 0{,}057v$
   b) Sim.
   c) R$ 13.978,46.

20.
   a) R$ 200,00.
   b) R$ 139,00.
   c) $\approx$ 16,39 anos.

21. $y = 7{,}4375x + 8{,}75$

22.

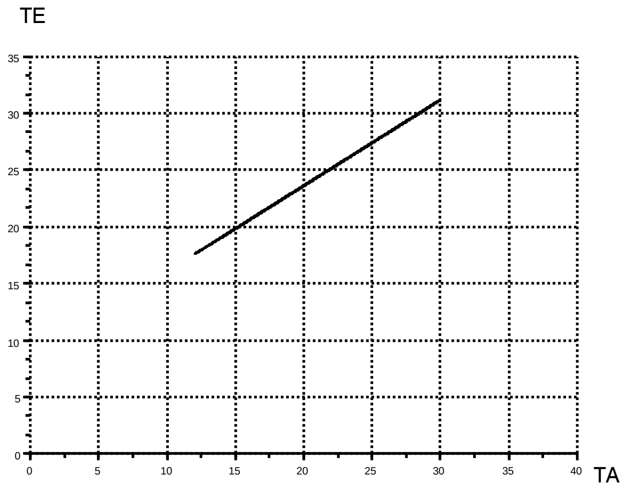
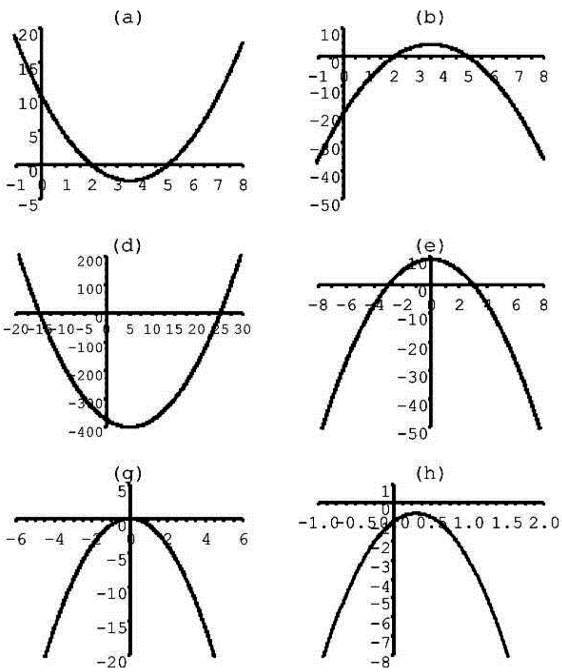


Imagem: (17,582; 31,19)

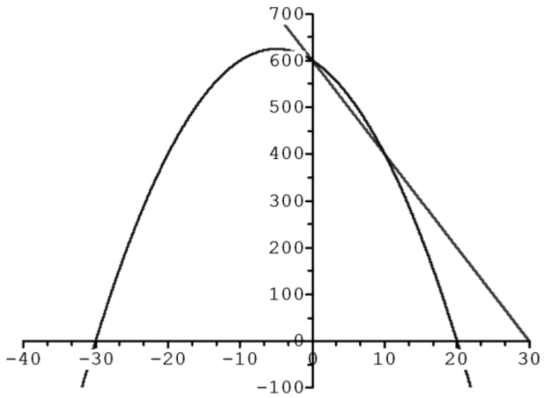
CAPÍTULO 8

1. Gráficos



	D(f)	Im(f)	Zeros	Vértice	Estudo do Sinal / Crescente e decrescente
a)	IR	$[-2{,}25;\infty)$	{2, 5}	(3,5; -2,25)	$f(x)=0 \to \{2;5\}$ $f(x)>0 \to (-\infty;2)\cup(5;\infty)$ $f(x)<0 \to (2{,}5)$ Crescente $(3{,}5;\infty)$ Decrescente $(-\infty;3{,}5)$
b)	IR	$(-\infty;4{,}5]$	{2, 5}	(3,5; 4,5)	$f(x)=0 \to \{2;5\}$ $f(x)>0 \to (2;5)$ $f(x)<0 \to (-\infty;2)\cup(5;\infty)$ Crescente $(-\infty;3{,}5)$ Decrescente $(3{,}5;\infty)$
c)	IR	$(-\infty;-3]$	$\nexists$	(2; –3)	$f(x)<0 \to \mathbb{R}$ Crescente $(-\infty;2)$ Decrescente $(2;\infty)$
d)	IR	$[-400;\infty)$	{–15, 25}	(5, –400)	$f(x)=0 \to \{-15;25\}$ $f(x)>0 \to (-\infty;-15)\cup(25;\infty)$ $f(x)<0 \to (-15;25)$ Crescente $(5;\infty)$ Decrescente $(-\infty;5)$
e)	IR	$(-\infty;9]$	{–3, 3}	(0, 9)	$f(x)=0 \to \{-3;3\}$ $f(x)>0 \to (-3;3)$ $f(x)<0 \to (-\infty;-3)\cup(3;\infty)$ Crescente $(-\infty;0)$ Decrescente $(0;\infty)$
f)	IR	$[-5{,}0625;\infty)$	{0; 4,5}	(2,25; –5,0625)	$f(x)=0 \to \{0;4{,}5\}$ $f(x)>0 \to (-\infty;0)\cup(4{,}5;\infty)$ $f(x)<0 \to (0;4{,}5)$ Crescente $(2{,}25;\infty)$ Decrescente $(-\infty;2{,}25)$
g)	IR	$(-\infty;0]$	{0}	(0, 0)	$f(x)=0 \to 0$ $f(x)<0 \to R-\{0\}$ Crescente $(-\infty;0)$ Decrescente $(0;\infty)$
h)	IR	$(-\infty;-0{,}55]$	$\nexists$	(0,3; –0,55)	$f(x)<0 \to \mathbb{R}$ Crescente $(-\infty;0{,}3)$ Decrescente $(0{,}3;\infty)$

2. (0,600) e (10,400)



3. 20

4. $k = 3$

5. $m = 11$

6. V F F V F V F F V

7. a) $\{-1; 3\}$

b) $c = -3$

c) $(1; \infty)$

d) $(-\infty; -1) \cup (3; \infty)$

8. $f(x) = -2x^2 - 6x + 8$

9.

a) $f(8) < 0$

b) $f(2{,}5) > 0$

c) $f(5{,}2) > 0$

d) $f(1) = 0$

e) $f(0) < 0$

f) $f(-4) < 0$

g) $f(7) = 0$

h) $f(250) < 0$

i) $f(1{,}5) > 0$

j) $f(6{,}9) > 0$

10.

Para f(x)	Para g(x)
cima	baixo
$V\left(\frac{5}{2}, -\frac{9}{4}\right)$	V(3,4)
$D = \mathbb{R}$ $Im = \left[-\frac{9}{4}, \infty\right)$	$D = \mathbb{R}$ $Im = (-\infty, 4]$
mínimo	máximo
Sim, 4 e 1	Sim, 1 e 5
(0,4)	(0,–5)
(1,0) e (4,0)	(1,0) e (5,0)
0	3
não	não

11.

a) $a < 0$ e $\Delta > 0$

b) $a < 0$ e $\Delta = 0$

c) $a > 0$ e $\Delta < 0$

d) $a > 0$ e $\Delta > 0$

12. $m > 0$

13. $a = -1$ e $c = 4$

14. $c = -10$

15.
a) 323
b) 7
c) 408

16. $m = 2{,}2$

17. P(3,5; 8,25)

18. 9 metros.

19. R$ 1400

20. 8 unidades.

21.
a) 16 m; 1 m e 4 m
b) 10 seg.

22. 32°C

23. 250 metros e 5 segundos.

24. B

25.
a) $y = 100 - x^2$
b) 36 camisetas.
c) 9 ternos.

d) 100 camisetas.

e) Não.

26. A

CAPÍTULO 9

1.

a) $x = \frac{3}{4}$

b) $x = \frac{1}{2}$

c) $x = 10$

d) $x = -2$

e) $x = -1$

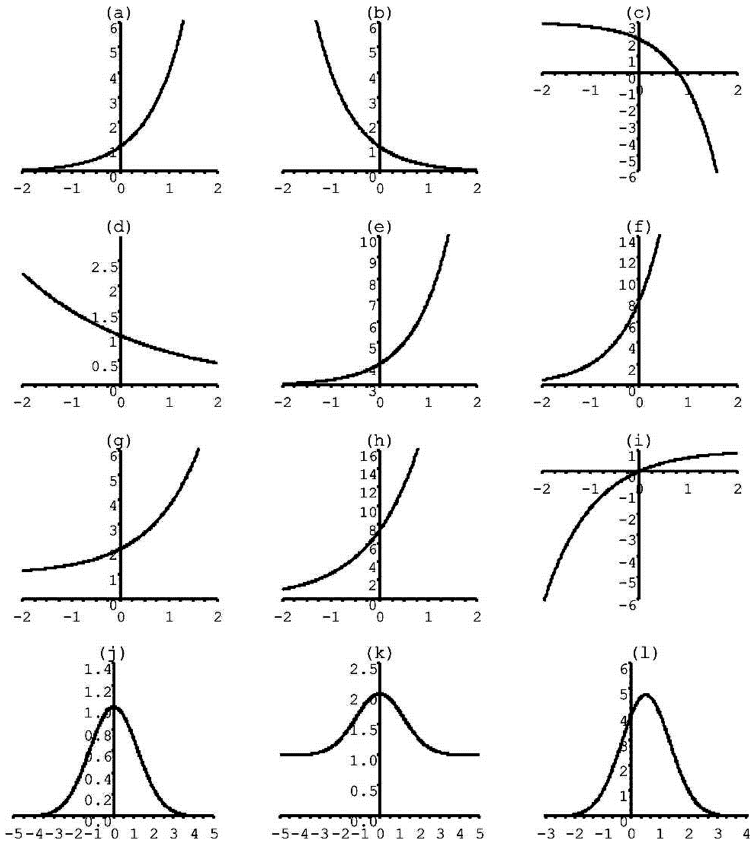
f) $x = -\frac{48}{25}$

g) $x = \frac{8}{5}$

h) $x = \frac{6}{17}$

i) $x = 0$

2.



a) $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = (0, \infty)$

b) $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = (0, \infty)$

c) $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = (-\infty, 3)$

d) $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = (0, \infty)$

e) $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = (3, \infty)$

f) $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = (0, \infty)$

g) $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = (1, \infty)$

h) $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = (0, \infty)$

i) $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = (-\infty; 1)$

j) $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = (0; 1)$

k) $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = (1; 2)$

l) $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = (0; 4{,}76)$

3. 4,621% a.a.

4. 1224 alunos.

5. 1.778 unidades.

6.
a) R$ 18 894,60
b) R$ 18 786,18

7. 62 árvores.

8. R$ 30 509,95.

9. 80 decibéis.

10. 153 bactérias e 95 625 bactérias.

11. 1043 anfíbios e 1235 anfíbios.

12. R$ 2.484,85.

13. 59,47ºC.

CAPÍTULO 10

1.
a) 5,9996
b) 470,8132
c) –0,4776
d) –1,4565

e) 2,6834

f) 148,9928

g) 2

h) 2

i) 1,1396

j) 451,8491

k) 0,3409

2.

a) {–1,3}

b) {–2,2}

c) {2}

d) {5,8}

e) {12}

f) {2,7320}

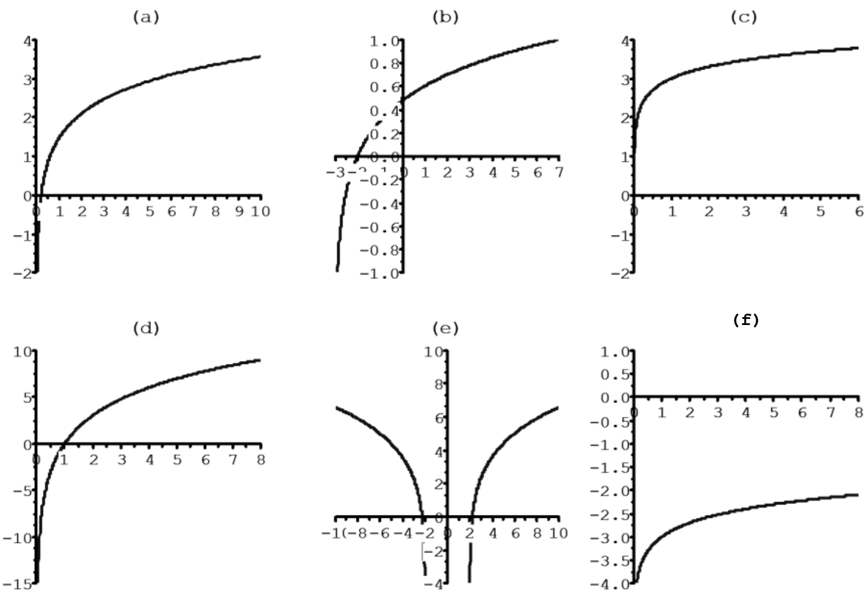
g) {4,2232}

h) {0,6213}

i) {1,3181}

j) {1}

3.



a) $D(f) = (0,\infty)$ e $Im(f) = \mathbb{R}$

b) $D(f) = (-3,\infty)$ e $Im(f) = \mathbb{R}$

c) $D(f) = (0,\infty)$ e $Im(f) = \mathbb{R}$

d) $D(f) = (0,\infty)$ e $Im(f) = \mathbb{R}$

e) $D(f) = (-\infty,-2) \cup (2,\infty)$ e $Im(f) = \mathbb{R}$

f) $D(f) = (0,\infty)$ e $Im(f) = \mathbb{R}$

4. A, B

5. $\frac{83}{6}$

6.
a) R$ 1.464,47.
b) 35 meses

7.
a) 140 dB, causa danos.
b) 120 dB, causa danos.
c) 80 dB, não causa danos.
d) 75,05 dB, não causa danos.

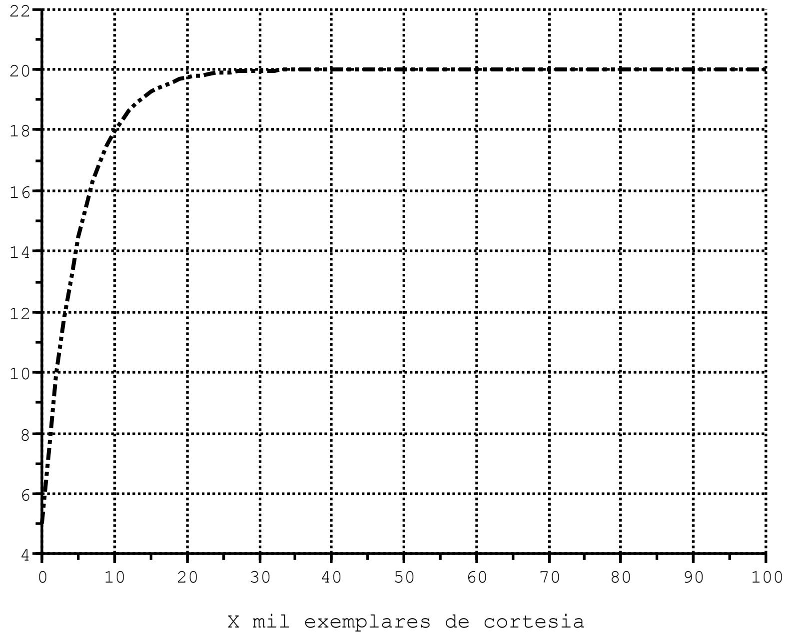
8.
a) 7,62
b) $7{,}079457844 \times 10^{16}$ ou $10^{16,85}$

9. Aproximadamente 33,56 anos ou 33 anos e 6 meses.

10. 27,77 minutos.

11.

a)



b) 5.000

c) 17.970

d) 20.000

12. Aproximadamente 12,4 meses.

13. 2,409 anos ou aproximadamente 2 anos, 4 meses e 27 dias.-

14.

a) 1.373.948,112; 1.442.731,843 e 1.500.230,00.

b) Aproximadamente 2015.

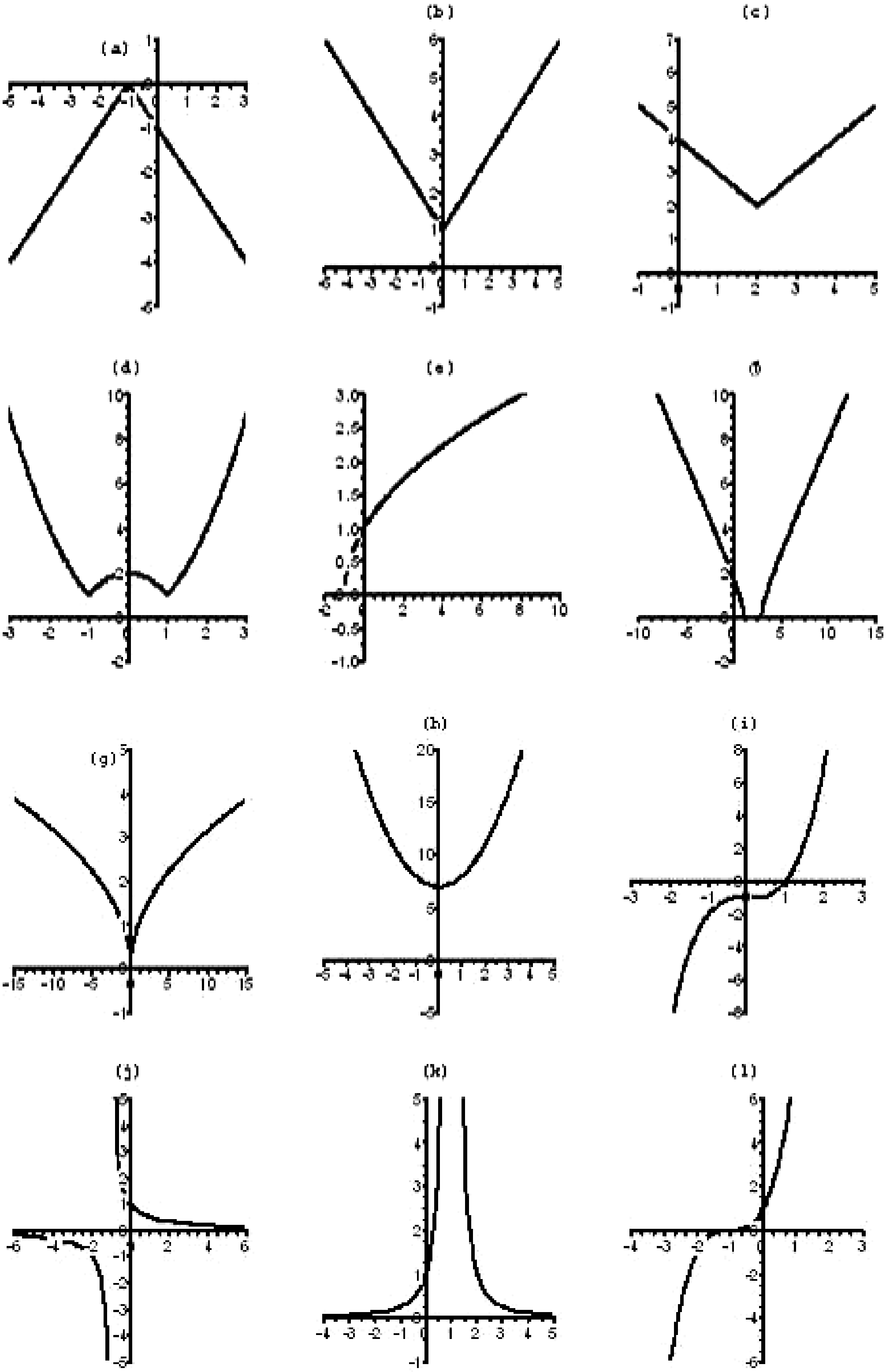
c) Aproximadamente 71 anos.

15. 4,48463 milhões.

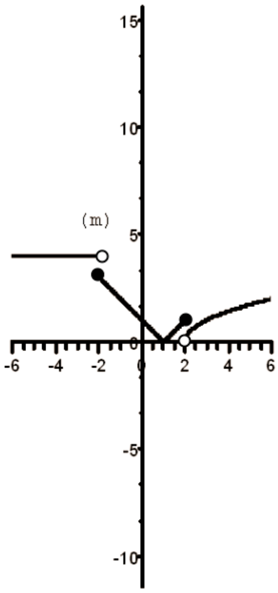
16. 37,5 unidades.

CAPÍTULO 11

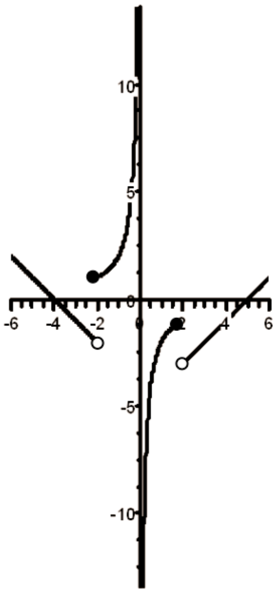
1.



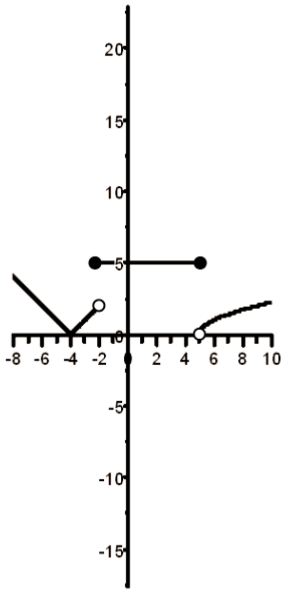
(m)



(n)



(o)



a) $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = (-\infty, 0]$

b) $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = [1, \infty)$

c) $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = [2, \infty)$

d) $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = [1, \infty)$

e) $D(f) = [-1, \infty)$ e $Im(f) = (0, \infty)$

f) $D(f) = (-\infty, 1] \cup [3, \infty)$ e $Im(f) = [0, \infty)$

g) $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = [0, \infty)$

h) $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = [7, \infty)$

i) $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}$

j) $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$ e $Im(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

k) $D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$ e $Im(f) = (0, \infty)$

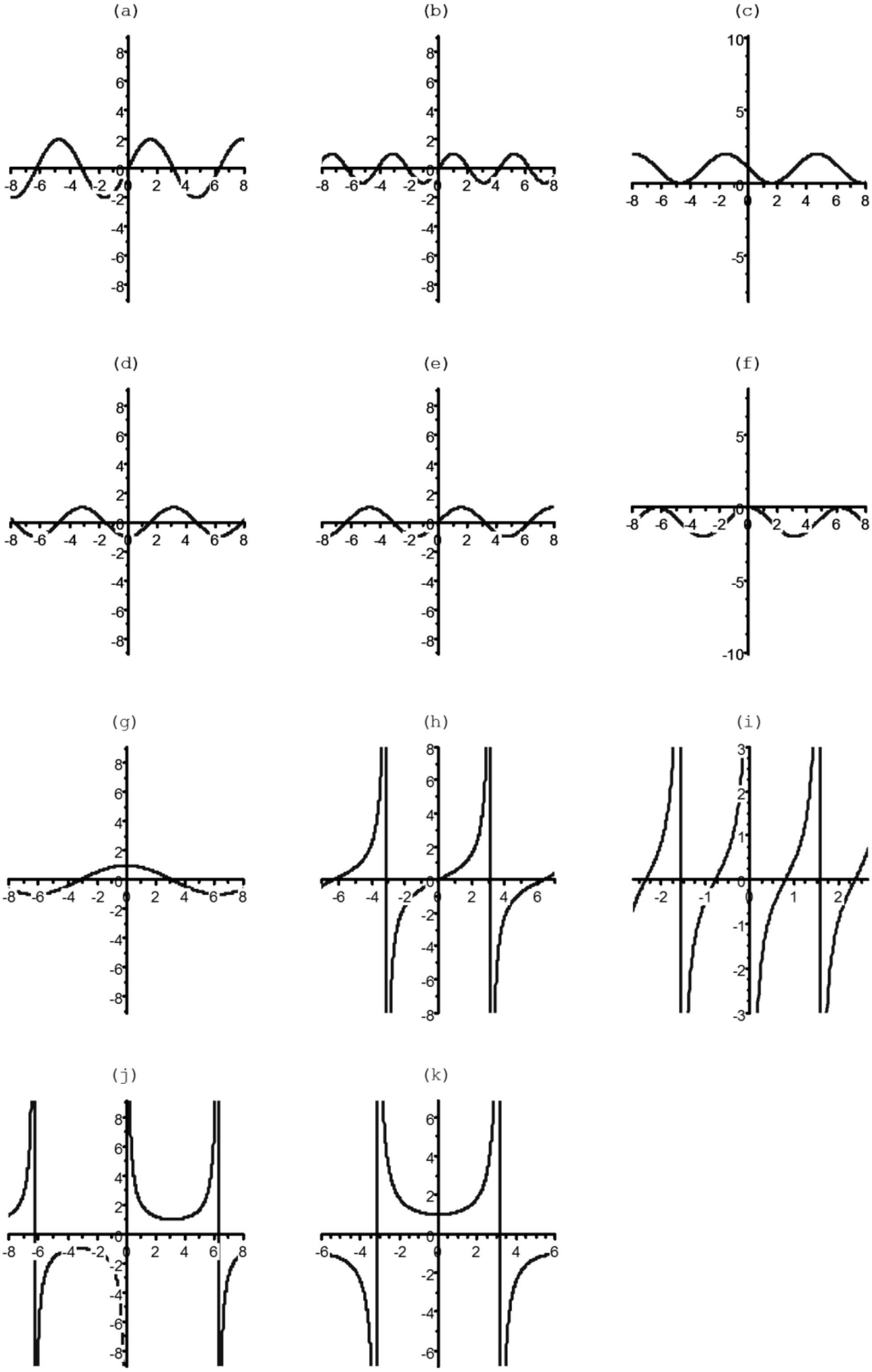
l) $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}$

m) $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = [0, \infty)$

n) $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ e $Im(f) = \mathbb{R}$

o) $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = [0, \infty)$

2.



a) $D(f) = \mathbb{R}$ $Im(f) = [-2,2]$ $P = 2\pi$

b) $D(f) = \mathbb{R}$ $Im(f) = [-1,1]$ $P = \frac{4}{3}\pi$

c) $D(f) = \mathbb{R}$ $Im(f) = [0,2]$ $P = 2\pi$

d) $D(f) = \mathbb{R}$ $Im(f) = [-1,1]$ $P = 2\pi$

e) $D(f) = \mathbb{R}$ $Im(f) = [-1,1]$ $P = 2\pi$

f) $D(f) = \mathbb{R}$ $Im(f) = [-2,0]$ $P = 2\pi$

g) $D(f) = \mathbb{R}$ $Im(f) = [-1,1]$ $P = 4\pi$

h) $D(f) = \mathbb{R} - \{\pi + 2k\pi\}$, com $k \in \mathbb{Z}$ $Im(f) = \mathbb{R}$ $P = 2\pi$

i) $D(f) = \mathbb{R} - \left\{\frac{k\pi}{2}\right\}$, com $k \in \mathbb{Z}$ $Im(f) = \mathbb{R}$ $P = \frac{\pi}{2}$

j) $D(f) = \mathbb{R} - \{2k\pi\}$, com $k \in \mathbb{Z}$ $Im(f) = \mathbb{R} - (-1,1)$ $P = 4\pi$

k) $D(f) = \mathbb{R} - \{\pi + 2k\pi\}$, com $k \in \mathbb{Z}$ $Im(f) = \mathbb{R} - (-1,1)$ $P = 4\pi$

Bibliografia

ANTON, Howard. **Cálculo**: um novo horizonte . 6. ed. Porto Alegre, RS: Bookman, 2000. 1 v.

BATSCHELET, E. **Introdução à matemática para biocientistas**. Rio de Janeiro, RJ: Interciência; São Paulo, SP: USP, 1978.

BEZERRA, Manoel Jairo. **Matemática para o ensino médio**. 5. ed. São Paulo, SP: Scipione, 2001.

BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática**: 5ª série. 5. ed. São Paulo, SP: Moderna, 2003.

______. **Matemática**: 6ª série. 5. ed. São Paulo, SP: Moderna, 2003.

______. **Matemática**: 7ª série. 5. ed. São Paulo, SP: Moderna, 2003.

BIGODE, Antonio José Lopes. **Matemática hoje é feita assim**. São Paulo, SP: FTD, 2000.

BONGIOVANNI, Vincenzo; LEITE, Olímpio Rudinin Vissoto; LAUREANO, José Luiz Tavares. **Matemática & vida**: quinta série: números: medidas: geometria: 1068 exercícios propostos. 12. ed. São Paulo, SP: Ática, 1996.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**: contexto & aplicações: ensino médio e preparação para a educação superior. 1. ed. São Paulo, SP: Ática, 2001.

EUREKA: Olimpíada Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro, RJ: Impa. n. 1, mar. 1998. Quadrimestral.

EUREKA: Olimpíada Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro: Impa. n. 7, abr. 2000. Quadrimestral.

GENTIL, Nelson; GRECCO, Sérgio Emílio; GRECO, Antonio Carlos; SANTOS, Carlos Alberto Marcondes dos; BELLOTTO FILHO, Antônio. **Matemática para o 2º grau.** 5. ed. São Paulo, SP: Ática, 1996. 1 v.

GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto, **Matemática uma nova abordagem.** São Paulo, SP: Editora FTD, 2001. Vol. 1.

GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI JUNIOR, José Ruy. **Matemática fundamental**: 2º grau: volume único: resolução exercícios propostos e de revisão. São Paulo, SP: FTD, 1994.

GOLDSTEIN, Larry Joel; LAY, David C.; SCHNEIDER, David I. **Matemática aplicada**: economia, administração e contabilidade. 8. ed. Porto Alegre, RS: Bookman, 2006.

GRASSESCHI, Maria Cecília Castro; ANDRETTA, Maria Capucho; SILVA, Aparecida Borges dos Santos. **PROMAT**- Projeto Oficina de Matemática, 8ª série, São Paulo, SP: FTD, 1999.

GUELLI, Oscar et al. **Contando a história da matemática:** história da equação do 2º grau. 6. ed. São Paulo: Ática, 1996. 6 v.

HOFFMANN, Laurence D. **Cálculo**: um curso moderno e suas aplicações. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1999.

IBGE. Disponível em: <www.ibge.gov.br>. Acesso em: 04 mai. 2006.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David Mauro; PÉRIGO, Roberto. **Matemática**: volume único. São Paulo, SP: Atual, 1997.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MACHADO, Antonio dos Santos. **Matemática e realidade**: 8ª série. 3. ed. São Paulo, SP: Atual, 1998.

IPEADATA - Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada. **Dados macroeconômicos e regionais.** Disponível em: <http://www.ipeadata.gov.br/ipeaweb.dll/ipeadata?81786125>. Acesso em: 04 mai. 2006 e 19 jun. 2007.

LARSON, Ron; HOSTETLER, Robert P.; EDWARDS, Bruce H. **Cálculo com aplicações**. 4. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1998.

MEDEIROS, Valéria Zuma; CALDEIRA, André Machado; SILVA, Luiza Maria Oliveira da; MACHADO, Maria Augusta Soarez. **Pré-Cálculo**. São Paulo, SP: Pioneira Thomson Learning, 2006.

MORETTIN, Pedro Alberto; HAZZAN, Samuel; BUSSAB, Wilton de Oliveira. **Cálculo**: funções de uma e várias variáveis. São Paulo, SP: Saraiva, 2003.

MUROLO, Afrânio Carlos; BONETTO, Giácomo Augusto. **Matemática aplicada à administração, economia e contabilidade**. São Paulo, SP: Pioneira Thomson Learning, 2004.

PAIVA, Manoel. **Matemática**: volume único. 1. ed. São Paulo, SP: Moderna, 1999.

SAFIER, Fred. **Teoria e problemas de pré-cálculo.** Porto Alegre, RS: Bookman, 2003.

SILVA, Sebastião Medeiros da; SILVA, Elio Medeiros da; SILVA, Ermes Medeiros da. **Cálculo Básico para Cursos Superiores**. 1. ed. São Paulo, SP: Atlas, 2004.

STEWART, James. **Cálculo:** volume 1. 4. ed. São Paulo, SP: Pioneira Thomson Learning, 2003.

Sobre as Autoras

Márcia Lourenço

Professora adjunta da Universidade Feevale, graduada em Matemática (licenciatura plena) pela Universidade do Vale do Rio dos Sinos – Unisinos e mestre em Matemática Aplicada pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Desempenha atividade de docente desde 1994 como professora de ensino médio e fundamental, desde 2000 atua como professora adjunta em ensino superior, onde leciona as disciplinas de Desenho Geométrico, álgebra Linear e Geometria Analítica, Cálculo Diferencial e Integral, Computação Simbólica e Numérica e Matemática Aplicada nos cursos de Design, Administração e Engenharias.

Ana Paula Ern da Silva

Professora adjunta da Universidade Feevale desde 1999, graduada no curso de Licenciatura em Matemática e especialista em Ensino de Matemática pela Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC) e, Mestre em Matemática Aplicada pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Desempenha atividade de docente como professora de ensino superior lecionando disciplinas de Matemática I, Matemática Aplicada ao Design, Álgebra Linear e Geometria Analítica e Cálculo Diferencial e Integral para cursos de Sistemas de Informação, Administração, Ciência da Computação e Engenharias.

UNIVERSIDADE
FEEVALE